力　学

大学院理学研究科　素粒子宇宙物理学専攻

高エネルギー物理学研究室

大島　隆義

教科書：
　パリティー物理学コース、太田信義著「一般物理学（上）」

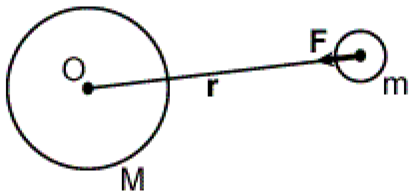
- -

「場」としてのポテンシャルの具体例として　万有引力　を扱う。

★質量M、mの物体に働く万有引力Fは

$$F = -G\frac{mM}{r^2}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)$$

であり、Gは万有引力常数＝6.6×10^{-11} ($N\cdot m^2/kg^2$)である。



★中心力

力Fの方向が作用線上にあり、Fの大きさが中心からの距離rのみに依存するもの。

★式（3・40）を導いてみよう。

力とポテンシャルは

$$F = -\nabla U(r)$$

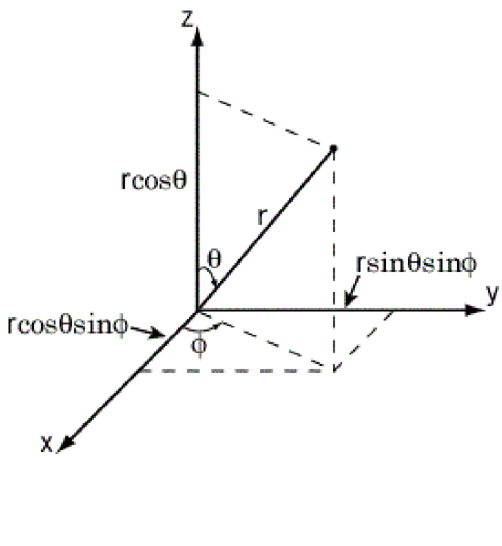
である。ここで、U(r) = V(r) と置く。　中心力のためベクトルrをスカラー量のrに置き換えられる。
上式を計算するについて、教科書に従わず、3次元の極座標を取ってみよう。下の図を参考にせよ。
この場合の変数は、r, θ, φであり、図のようにとる。x, y, z はつぎのように極座標関数で表現できる。同じように
ナブラ∇も極座標表示で表せ、

$$x = r\sin\theta\cos\phi\,;\quad y = r\sin\theta\sin\phi\,;\quad z = r\cos\theta$$

$$\nabla = \boldsymbol{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \boldsymbol{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \boldsymbol{e}_\phi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}$$

となる。詳しくは、自分で調べよ。V(r)はrのみの関数であるので、
ナブラのオペレートすると（つまり勾配を求めると）rでの偏微分の
第一項のみが残ることがわかる。つまり、

$$\boldsymbol{F} = -\nabla V(r) = -\boldsymbol{e}_r\frac{\partial V(r)}{\partial r}$$



である。$\frac{\mathrm{d}V(r)}{\mathrm{d}r} = V'(r)$　：ダッシュは引数（この場合はr）での微分を表示する。また、r方向の単位ベクトルe_rは

$e_r = \frac{\boldsymbol{r}}{r}$であるので、

$$\boldsymbol{F} = -V'(r)\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)$$

式（3・40）を得る。

この機会に極座標表示のナブラを学べ！

★教科書ではFが保存力であることを証明している。つまり、∇×F＝0.
教科書通りにやればよい。$V'(r)\frac{\boldsymbol{r}}{r}$　を x, y, z で偏微分するのに引っかかるか？
一例として、yでの偏微分を示しておこう：
f（r）をrの関数とすると、

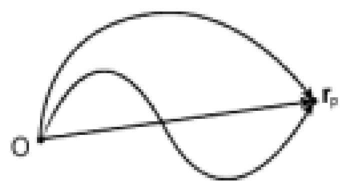
$$\frac{\mathrm{d}f(r)}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}f(r)}{\mathrm{d}r} = \frac{\mathrm{d}\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}f(r)}{\mathrm{d}r} = \frac{y}{r}\cdot\frac{\mathrm{d}f(r)}{\mathrm{d}r}$$

と計算すればよい。　∇×F＝0　が導けるはず。つまり、Fは保存力であることが証明できた。

★Fが保存力であれば、∇×（∇U（r））＝0　も示せる。一般にスカラー量の gradient（勾配）の rotation（回転）はゼロである。既に、学んだ！
直感的にも分かるはず。力Fは、ポテンシャルの勾配である。勾配の方向はr方向であった。つまり、力のベクトルは中心を向く。こんなベクトル分布に回転成分は存在しない、ことは説明を要しない。回転成分が無いということは、ナブラの外積をオペレートして回転成分を抽出しようとしても何もないこと。　∇×（∇V(r)）＝0ということだ。

★保存力であるので、経路に依存しない。したがって、授業でやったように、ポテンシャルは

$$U(\boldsymbol{r}_p) = -\int_0^{\boldsymbol{r}_p}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \cdots = \int_0^{r_p}\mathrm{d}V(r) = V(r_p)$$



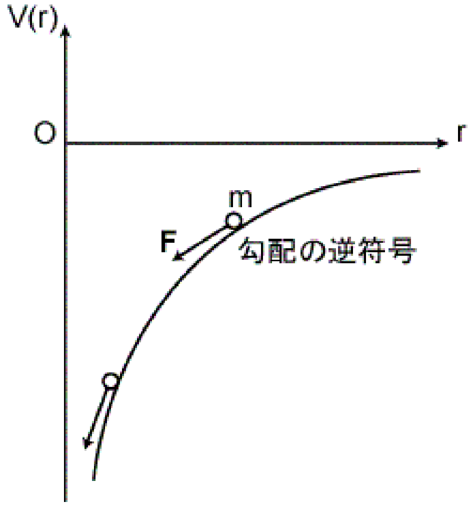
と表せる。ポテンシャルの原点を O とした。そして、

$$\boldsymbol{F} = -G\frac{mM}{r^2}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right) = -V'(r)\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)\quad;\quad V'(r) = G\frac{mM}{r^2}$$

から、ポテンシャルV（r p）は

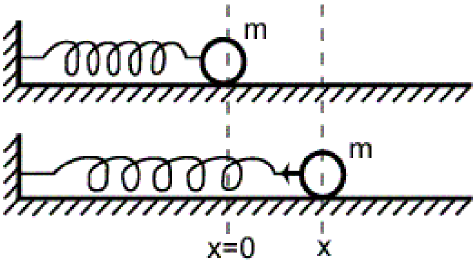
$$V(r_p) = \int_0^{r_p} G\frac{mM}{r^2}\mathrm{d}r = -G\frac{mM}{r_p}$$

と求まる。ポテンシャルは下図に示すような分布を持ち、mの物体に働く力Fはポテンシャルの勾配に負符号をつけたもの。つまり、勾配の逆方向に働く。Mから離れるほど力は小さくなり、逆に近づくほど強くなることがイメージできるはず。



1．　単振動

どの教科書にもでてくるバネの振動である．質点の変位が小さい場合は、バネの復元力は変位 x に比例する．



平衡状態

比例定数＝バネ定数k

1．1　単振動の運動方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2\, x$$

$\omega_0^2 = k/m$　（**振動数**　ω_0）、　**周期**　$T = 2\pi\,(m/k)^{1/2}$

1．2　一般解

$x = A_1\, e^{i\omega t} + A_2\, e^{-i\omega t}$

ここで、A_1, A_2 は共に複素数である。A_1＝a_1+ib_1, A_2＝a_2+ib_2（a_1, a_2, b_1, b_2 は実数）とし、物体の位置の変位xは実数であるとして、A_1, A_2 の関係を求めてみよ．

$$A_1^* = A_2$$

が求まる。

「*」は複素共役の意味：A_1＝a_1+ib_1 ，A_1^*＝a_1-ib_1.

1．3　エネルギー保存則

式（4・1）に $\dot{x}$ をかけて、時間積分すると、式（4・10）が求まる．

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = E$$

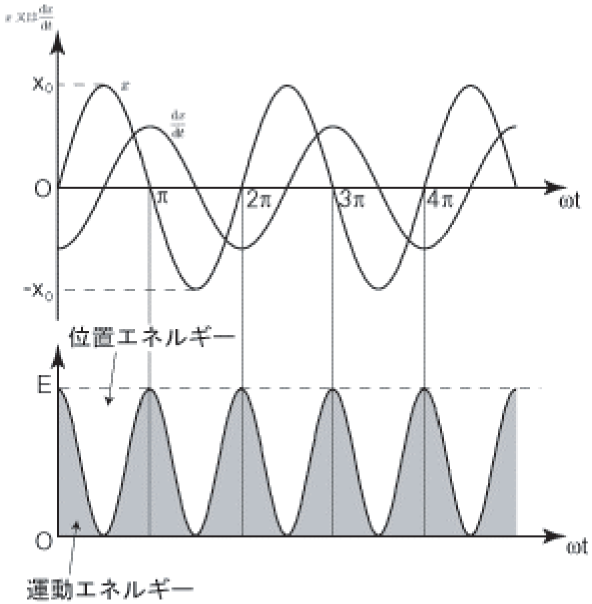
第一項は運動エネルギーであることは前章で学んだ．また、右辺は積分定数であって、一定値をもつ。第一項がエネルギーを表すものであれば、第二項も右辺も同質のものであり、エネルギーである．右辺は常に成り立つものであり、エネルギー値が不変であることを意味する（エネルギー保存である）．ばねの初期状態として、位置x_0 で初速度ゼロを想定すると、第一項はゼロであるが、第二項が全エネルギーを有することになる．それはバネが縮もうとするポテンシャル・エネルギーである．位置のみの関数である．

バネは常に（運動エネルギー）＋（ポテンシャル・エネルギー）を一定に保ちながら、この二つのエネルギー形態の間を行ったり来たりするわけだ。これが、解　式（4・3）　である．

上で想定した初期条件のもとでは、

$$x(t=0) = A\cos(\beta) = x_0$$
$$\frac{\mathrm{d}x(t=0)}{\mathrm{d}t} = -\omega A\sin(\beta) = 0$$

第二式から、A＝0では振動が無いということでお話にはならない．したがって、$\beta=0$。これを第一式に代入して $A=x_0$ を得る．よって、　$x=x_0\cos(\omega t)$ が解．エネルギーの形態の移り変わりは下図のようになる．



$$x = A\cos\omega t\ ;\quad \dot{x} = -\omega A\sin\omega t$$

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2\sin^2\omega t = \frac{1}{2}m\left(\frac{k}{m}\right)A^2 sin^2\omega t = \frac{1}{2}kA^2 sin^2\omega t$$

$$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 cos^2\omega t$$

従って、全エネルギーは

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\left(sin^2\omega t + cos^2\omega t\right) = \frac{1}{2}kA^2 = E$$

と常に一定値をもつ．

式（4・1）の解法

前回のホームページに小生の解法を載せた．ここでは、page56-57 **で異なる導入をしている．また、**$x = e^{pt}$ **の導入を** a priori **にやっているが．いろいろ学べ．**