

力学

大学院理学研究科 素粒子宇宙物理学専攻

高エネルギー物理学研究室

大島 隆義

教科書：

パリティ-物理学コース、太田信義著「一般物理学(上)」

1. 保存力とポテンシャル

物体に力 F が働き、 P_1 から P_2 への移動にともなって力がなす仕事 W は、

$$W = \int F \cdot dr \quad (1)$$

である。この W が経路に依存しない力が保存力である。

物体は力の作用を受け、仕事をされる。つまり、仕事をする能力を授かるわけだ。この潜在的能力がポテンシャルまたはポテンシャルエネルギーと云いられるもので、 $U(r)$ と表す。

$$U(r) = - \int F \cdot dr \quad (2)$$

たとえば、物体を地球に引き付ける万有引力がある。

これに逆らって質点を持ち上げるには仕事 W が必要だ。それは質点を持ち上げる力（引く重力と等価） F と持ち上げる距離 h の積である。この高い位置にある質点はもとの位置に戻るとき、持ち上げられたと同じ量の仕事ができる能力を有する。これが、ポテンシャル $U(r)$ である。この仕事ができる能力はすでに登場した運動エネルギーと同質のものであり、運動エネルギーが質点の速度に依存したのに対し、いまの場合が位置に依存する。位置エネルギーともよぶ。

具体的には、 $F = mg$ 。これを高さ 0 から h まで積分すると、よくご存知の

$$U(r) = - mgh \quad (3)$$

が得られるわけだ。

$U(r)$ は経路に沿っての線積分であることを忘れるな。

ポテンシャルは力の積分だ。したがって、力はポテンシャルの微分である。授業で丁寧に導出したのでノートをみよ。

$$F = - \nabla U(r) \quad (4)$$

ポテンシャルはスカラー量である．それにナブラ（微分演算子）をオペレートする：ポテンシャルの勾配（gradient）を求めるわけだ．イメージとして、山の高さをポテンシャルと想定すると、 $U(r)$ は山の勾配であり、働く力 F は勾配にマイナス符号がついたもの．実に、直感的にわかるはず．

力が保存力であると、

$$\nabla \times F = 0 \quad (5)$$

授業で丁寧に導出したのでノートをみよ．イメージとしては、 F はナブラの方向のベクトルであり、このベクトルにさらに同方向のベクトルの外積を取るわけだ．したがって、ゼロになる．

また、ナブラの外積は、この場合、力 F の回転成分を引き出す．これがゼロである、つまり、保存力 F には回転成分がないことを意味しているわけだ．

上記、微分表示を積分表示で示したものが、

$$\oint F \cdot dr = 0 \quad (6)$$

（ \oint は閉曲線に沿っての積分を示す．）

である．空間に力 F の分布があり、任意の閉曲線を考える．この閉曲線に沿っての線積分はゼロであると云う．保存場では仕事量は経路に依存しない．任意の閉曲線を円に置き換えよう．つぎに、円の半径をゼロに縮めよう．結局、移動しないと同じこと．つまり、仕事はゼロ．

質点を一周させると仕事が必要であれば、逆方向に移動させると仕事が生まれる．つまり、エネルギーが生じる．幾度も幾度も周回すると、エネルギーが湧き出る．これは、エネルギー保存に反する．このためにも、上記、線積分はゼロである．

力 F を円に沿って線積分をしたものがゼロであるということは、 F に回転の成分がないことを意味する．つまり、式(5)である．

後刻ストークスの定理を学ぶ．これは上式(5)と(6)が等価であることを教えてくれる．

$$\oint F \cdot dr = \int (\nabla \times F) \cdot ds \quad (7)$$

左辺は閉曲線に沿っての線積分、右辺は閉曲線を辺とする曲面にわたる面積分である．

教科書 page46-47 ならびに付録の A.3 (pageA5-A8) で学べ．

ここで、 ds は面積分の微小面積であり、面積は方向をもつ．つまり、ベクトルである．したがって、式(7)の左辺は閉曲線に沿っての力の積分は、閉曲線を辺とする曲面上での力の回転ベクトルの面に垂直な成分の面積分に等しい．

後期の電磁気学には必要不可欠なものとして登場するので、そのときは思い出せ．

ポテンシャルが位置だけの関数 $U(r)$ であるようなものを**場**と云う．具体的には、万有引力は位置の関数である重力ポテンシャルの勾配（gradient）であり、質量の存在のために幾何学的に空間が歪んだものと考えられる．クーロン力も電荷の存在のため空間が歪んだもので、クーロン・ポテンシャルにより記述する．それぞれの場を重力場、電磁気場と云う．力よりもポテンシャルの方がより本質的である．場は物理の本質である．