力　学

大学院理学研究科　素粒子宇宙物理学専攻

高エネルギー物理学研究室

大島　隆義

教科書：
　パリティー物理学コース、太田信義著「一般物理学（上）」

－－

1.　単振子

式(2.25)において θ をが小さい場合を考える．今後頻繁にでてくる**単振子**である．

解を求めるについて、sin ωt ならびに cos ωt が方程式を満足することから、説き起こしている．より一般的に解きたい人には、以下を参考にせよ．これが必ずしも一般的な解法かどうかは分からないが．

①　まず、

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pm\cos^{-1} x + C\ (\text{定数}) \qquad (1)$$

を準備として知っておくこと．導出してみよう．

$$x = \cos\theta \qquad (2)$$

とおく．$dx = -\sin\theta d\theta, 1-x^2 = 1-\cos^2\theta = \sin^2\theta$ であり、分母の $\sqrt{1-x^2}$ は $\pm|\sin\theta|$ である．ここで｜｜は絶対値をとることを意味し、θが第 1 ,2 象限の場合は＋符号を、第 3,4 象限の場合は－符号をとる．(1)の左辺は、従って、

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{-\sin\theta}{\pm|\sin\theta|}d\theta = \mp\int d\theta = \mp\theta + C\ (\text{定数}) \qquad (3)$$

θは

$$\begin{aligned}\theta &= \arccos x \\ &= \cos^{-1} x \qquad (4)\end{aligned}$$

であり、(1)式が求まる．

②　では、

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega^2\theta \qquad (5)$$

を解く.

両辺に $2\frac{d\theta}{dt}$ をかけると

$$2\frac{d\theta}{dt}\cdot\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega^2 2\theta\frac{d\theta}{dt}$$

これは

$$\frac{d}{dt} = \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -\omega^2\frac{d\theta^2}{dt} \qquad (6)$$

であり、積分すると、

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -\omega^2\theta^2 + C_0\text{（定数）} \qquad (7)$$

となる．ここで、C_0 について考える.

(7)式から C_0 は

$$C_0 = \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \omega^2\theta^2$$

$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2, \omega^2\theta^2$ はともに正または0（つまり、負でない数）である．従って、

$$C_0 = C_1^2\omega^2 \qquad (8)$$

と置き換える．ここで、C_1 は定数である．そして、(7)式の左辺は常に正または0であるため、

$$0 \leq \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - \omega^2\theta^2 + C_0$$
$$C_0 \geq \omega^2\theta^2$$
$$C_0 = C_1^2\omega^2$$

よって、

$$C_1^2 \geq \theta^2 \qquad (9)$$

各項の大小関係を調べた．それにもとづいて(8),(9)式から

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 &= -\omega^2\theta^2 + C_1^2\omega^2 \\ &= \omega^2(C_1^2 - \theta^2) \\ &\geq 0 \qquad (10)\end{aligned}$$

よって、

$$\frac{d\theta}{dt} = \pm\omega\sqrt{C_1^2 - \theta^2} \qquad (11)$$

と表現でき、(11)式の $\sqrt{\quad}$ 内は(9)式から常に正または0である.

(11)式を変形しよう.

$$\frac{d\theta}{\sqrt{C_1^2 - \theta^2}d\theta = \pm\omega dt} \qquad (12)$$

$\theta = C_1 x$ とおくと

$$d\theta = C_1 dx$$
$$\sqrt{C_1^2 - \theta^2} = C_1\sqrt{1 - x^2}$$

となり、(12)式の積分は

$$\int \frac{C_1 dx}{C_1\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pm\int \omega dt \qquad (13)$$

と書き直せる．(13)式の左辺は、(1)式である．従って、

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pm\cos^{-1}x + C_2\,(\text{定数}) \qquad (14)$$

(13)式の右辺は

$$\pm\int \omega dt = \pm[\omega t + C_3\,(\text{定数})] \qquad (15)$$

(14)＝(15)であるので、

$$\pm\left[\cos^{-1}x + C_2\right] = \pm[\omega t + C_4\,(\text{定数})] \qquad (16)$$

ここで、左辺、右辺の±符号の組み合せは 4 つある．

●＋＋の組み合せのとき

$$+(\cos^{-1}x + C_2) = +(\omega t + C_3)$$

$$\cos^{-1}x = \omega t + C_3 - C_2$$

cos を分けると

$$x = \cos(\omega t + C_3 - C_2) = \cos(\omega t + \alpha) \qquad (17)$$

ここで $\alpha = C_3 - C_2$ とおいた．

●＋－の組み合せのとき

$$+(\cos^{-1}x + C_2) = -(\omega t + C_3)$$

$$x = \cos(\omega t + C_3 + C_2) = \cos(\omega t + \beta) \qquad (18)$$

ここで $\beta = C_3 + C_2$ とおいた．

●－＋の組み合せのとき

$$-(\cos^{-1}x + C_2) = +(\omega t + C_3)$$

$$x = \cos(\omega t + C_3 + C_2) = \cos(\omega t + \beta) \qquad (19)$$

●-　-の組み合せのとき

$$-(\cos^{-1}x + C_2) = -(\omega t + C_3)$$

$$x = \cos(\omega t + C_3 - C_2) = \cos(\omega t + \alpha) \qquad (20)$$

解は

$$x = \cos(\omega t + \alpha) \quad \text{又は} \quad x = \cos(\omega t + \beta)$$

の形をとる．

両者とも同じ関数であって、αもβも定数であり、初期条件で決まるものである．

$$x = \cos\omega t \times \cos\alpha - \sin\omega t \times \sin\alpha$$

であるので、求めたいθは

$$\begin{aligned}\theta &= (C_1\cos\alpha)\cos\omega t - (C_1\sin\alpha)\sin\omega t \\ &= A\cos\omega t + B\sin\omega t \qquad (21)\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}A &= C_1\cos\alpha \\ B &= C_1\sin\alpha\end{aligned}$$

とおいた.
式(2･32)が導けたわけだ.

等時性（*isochronism*）

一般に振動系における振動周期 T が振幅に無関係な性質を等時性と云う.
サイクロイド振り子は振幅が有限の場合でも、また、おもりがその速さに比例する抵抗を受ける場合でも、厳密に等時性を保つ特別な振り子である.（物理学辞典より）

サイクロイド振り子（*cycloidal pendulum*）

次の機会に譲る.

3 運動方程式の積分

重要な力学概念、運動量、角運動量、エネルギーならびに保存則を学ぶ. 教科書の説明で充分である.

1. 運動量と力積 （運動量の保存）

運動量 （p） ＝ 物体の「運動の勢い」とイメージしよう.

$$\frac{dp}{dt} = F$$ (運動方程式：ニュートンのオリジナルな方程式の形)

運動量

力学を相対論まで拡張する場合、速度より運動量の方がより基本的な物理量である.（物理学辞典より）

野球と・・・

★ 「日常の物理事典」近角聡信著に面白い記事がある. 野球などでの打球の速度について. ボールの質量をm、バットなどの打器の質量をM とし、-v の速度で投げられたボールをV のバット速度で打った結果ボールはv ’の速度で飛んでゆく. これらのことが一直線上で起こるとする. 運動量保存則から

$$-mv + MV = mv' + MV' \tag{1}$$

V ’は打った後のバットの速度（未知数）である. V ’を求めるにはバットとボールのはねかえり係数 e を知る必要がある. はねかえり係数は

$$e = \frac{v'-V'}{v+V} \tag{2}$$

であるが、具体的に数値を如何に求めるか（測定するか）？
バットと同質素材の板の床を用意しh_1の高さからボールを落とし、跳ね上がる高さh_2を測定する. 落下運動を学んだ諸君には求まるはず. 答えは

$$e=\frac{\sqrt{h_2}}{\sqrt{h_1}}$$

である. h_1=1 m, h_2=0.5 mの場合、e=0.7 となる. 式(1)と(2)を解いてv ’を得ることができる. 答えは自分で解いてみよ！

★ v ’はvに比例する項とVに比例する項のふたつの項の和で表せる.
★ V=0 の場合を考えるのが面白い. つまり、バンドする場合である. 著者はバット質量をM=2 kg、e=0.5 と設定する. ボールの質量はm=0.15 kgとのこと. M>>mである. v ’=ev、いまの場合 v ’=0.4v となる. バットを振らず当てるだけで投げられたボールの40%の速度で跳ね返る. これはあまりいいバンドでない. V<0、つまりバットを引くバンドをしないとボールの速度を殺せない.
★ 一方、バットを振る場合. V に比例する項はほぼ (1+e)V となる. 今の場合 1.4V となる. バットを振る速さの1.4倍である. これが上の0.4vに加わる.
★ 両項ともはねかえり係数が大きいほどよくボールが飛ぶことを教える. 金属バットははねかえり係数がおおきいためよく飛ぶのだ. これ以上は「日常の物理事典」を読まれたい.

力積

ある時間内に働いていた力の積分： $\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}\,\mathrm{d}t$

運動量の保存

力が働かない場合（F=0）、

$$\frac{dp}{dt} = 0$$

よって、

p = constant： 運動量の保存

２． 角運動量と力のモーメント （角運動量の保存）

角運動量 （l = r×p ） ＝ 物体の「回転の勢い」とイメージしよう．

$$\frac{dl}{dt} = N$$

力のモーメント（ N = r×F ） ← r と F の外積

３． エネルギーと仕事 （運動エネルギーの保存）

仕事 ← r と F の内積

運動）エネルギー

物体や系が持っている仕事をする能力. 語源はギリシア語の仕事（ἔργον）.
17 世紀末に G.W. von Leibniz が mv^2 で物体の活力を表現し、力学的エネルギー保存則を把握しようとした. その後、G. Coriolis が今日の $1/2mv^2$ を運動エネルギーとした.

多くのエネルギー形態あり. 熱エネルギー、電磁気エネルギー、重力エネルギー、化学的エネルギー等など.

素粒子の世界では物質は高速（光速度と比べ無視できない速さ）で運動するため、素粒子のエネルギーは運動エネルギーのみを個別に扱うことができなく、質量エネルギーとまとめて $mc^2(1-\beta^2)^{-1/2}$ で与えられる. (物理学辞典より抜粋)