力　学

大学院理学研究科　素粒子宇宙物理学専攻

高エネルギー物理学研究室

大島　隆義

教科書：
　パリティー物理学コース、太田信義著「一般物理学（上）」

1.　円運動

円周に束縛された質点の運動を扱う。二次元運動であり、極座標表示が適する。

1.1　極座標表示における位置、速度、加速度（page 12-14）

二次元の直交座標系では、質点の位置は x, y 変数を用いて表した。この位置は極座標表示では動径方向の長さ r と回転角θ を変数として、以下（式(1･23)）ようになる。

$$\dot{\boldsymbol{e}}_r = -\boldsymbol{e}_x \sin\theta\,\dot{\theta} + \boldsymbol{e}_y \cos\theta\,\dot{\theta} = \dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta$$

$$\dot{\boldsymbol{e}}_\theta = -\boldsymbol{e}_x \cos\theta\,\dot{\theta} - \boldsymbol{e}_y \sin\theta\,\dot{\theta} = \dot{\theta}\boldsymbol{e}_r$$

上式では、 r 方向の単位ベクトル、 θ 方向の単位ベクトルを各々$\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$ と書いた。
単位ベクトル $\mathbf{e}_x$ と $\mathbf{e}_y$ は独立である。つまり、一方を用いて他方を表現できない。さらに、一方は他方の成分をも構成しない。これは $\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_y=0$ または $\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y =1$ であるということであり、直交している。同じように、二次元極座標表示では、$\mathbf{e}_r$ と $\mathbf{e}_\theta$ は独立、つまり、直交している。$\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_\theta = 0$ または $\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\theta = 1$ であるとことは、上式を代入すれば分かる。 θ 方向は、したがって、 r に直角な方向であることが分かる。

速度ベクトルならびに加速度ベクトルを極座標で表示してみよ（式(1.24)）。

一定の半径（$\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ =0)、かつ一定の角速度（$\frac{d\theta}{dt}$ = ω = 0)で円運動している場合は、速度ならびに加速度は一定であり、速度は θ 方向を向き、加速度は -r 方向を向くことが分かるはず（式(1･25)）。ここで、速度は半径×角速度（$v = a\frac{d\theta}{dt} = a\,\omega$）であることを覚えておくこと。これは、直感的にも分かるはずだ。

1.2　円運動（page 30-32）

図２．２の束縛された円運動を扱う。ニュートン方程式 ma = F は、

$$m\left\{-r\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 \boldsymbol{e}_r + r\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{e}_\theta\right\} = m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{T}$$

である。ここで、r 成分と θ 成分に分解すると、式(2･24)と(2･25)が得られる。質点を円周に保持する張力 T は内側を向く。この方向は e_r の逆方向なので、式(2･24)では T に負符号が付いていることに注意。

式(2･24)、(2･25)の左辺は、ニュートンの運動方程式の（質量）×（加速度）を極座標表示したもの。右辺は働く力の具体的中身をかいたものである。右辺を左辺に移行すれば、….＝0 となり、力のつりあいを示すことになる。

教科書に沿って行けば、方程式を解ける。

式(2･29)後の文書、「このTが正の領域だけを、・・・」、は本来ははじめに現れるべきもの。糸であるため、引っ張ることはできても、押すことはできない。したがって、T＞0ということ。
式(2･29)を図示してみるのもよい。特に、cos θ を横軸にとれば、直線の関係で明確である。