力　学

大学院理学研究科　素粒子宇宙物理学専攻

高エネルギー物理学研究室

大島　隆義

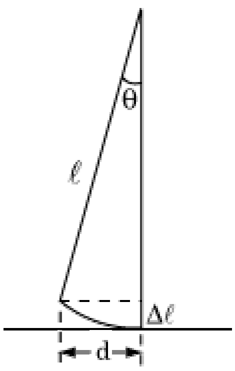
教科書：
　パリティー物理学コース、太田信義著「一般物理学（上）」

- -

5．3　フーコーの振り子

コリオリ力を用いて地球が自転していることが、日常のスケールの目に見える現象として学べる。

ここで、2，3箇所で近似がとられている．その妥当性を確認しておこう。



（1）振り子の振動が微小なので鉛直 z 方向の運動を無視する。
Z方向の振動量 Δz は $\Delta z = l - l\cos\theta \quad l\theta^2/2$。一方、水平方向の振動巾 d は $d = l\sin\theta \quad l\theta$。
また、各方向の速度は $v_z = l\theta\,(d\theta/dt)$, v（水平）$= l\,(d\theta/dt)$ 。
いま、$l = 10$ m, $\theta = 1^\circ$(=17.5 mrad), 5° (=87.5 mrad) とすると、d=0.18 m, 0.88 m である。一方、Δz = 0.0016 m, 0.038 m。　比 $\Delta z/d$ は 0.002, 0.04 である。速度に対する比も 0.0175, 0.088 となる。確かに、この程度の振動角では水平振動も小さく、z方向成分は水平成分と比較しさらに数 10 分の1と小さいことが分かる。よって、無視する。

（2）$\sin\theta=\theta$, $\cos\theta=1-\theta^2/2$ としたが、θが小さい領域ではこれが十分通用することを具体的に確認すること。

（3）式（5.17）の導出において、$x\cdot\frac{dx}{dt}$ 項は無視されている。この項は二次の項であり、一次の項のみを残してある。その理由は（1）で求めた小ささのため。因みに、式（5.17）の第一式の全項を書けば、

$$\frac{dx^2}{d^2t} = -\frac{g}{\ell}x + \frac{2\omega\cos\alpha}{\ell}x + \frac{dx}{dt} + 2\omega'\frac{dy}{dt}\,. \tag{1}$$

$$\zeta = x + iy \tag{2}$$

page 84 の変数変換について。

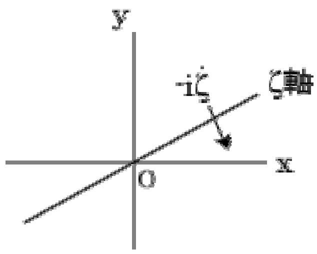
式（4.34）の基準座標と似ているが、違う。　二次元運動を統一的に一変数として扱う。これまで授業中に時

折云っていたように、複素数あるいは虚数というものを物理的にどのようなものとしてイメージすべきかを考える機会である。 x 軸と y 軸は 90 度ことなり、直交している。 直交するものは独立である。 **虚数 i** は実数と直交する。まさに、x+ iy は独立な2つのものを一つの関数で表示している。

その結果、ζ表示の運動方程式は、

$$\ddot{\zeta} = -\omega_0^2\zeta - 2\omega' i\dot{\zeta} \qquad (3)$$

となる。右辺第二項が無ければ、固有振動数が ω_0 のζの単振動の方程式だ。第二項は速度に比例する抵抗項に似ている。しかし、虚数-i が付いている。
つまり、第二項は単振動に対して直交する力に対応する。しかも、－符号が付いているということは、右図に示すように単振動現象を時計回りの方向に回転させるのではないかとイメージできる。



$$\zeta = e^{-i\omega' t}\zeta' \qquad (4)$$

page 85 の変数変換について。

$e^{-i\omega' t}$ は角速度-ω'で回転する座標系への変換作用のオペレータである。
$e^{-i\omega' t} = \cos\omega' t - i\sin\omega' t$ (page 56, 式 (4.7)) を用いて、複素平面での回転の様子を考えてみよ.

$\zeta = x + iy$, $\zeta' = x' + iy'$ を用いて $\zeta = e^{-i\omega' t}\zeta'$ を展開すると、

$$\begin{aligned}\zeta &= x + iy \\ &= (\cos\omega' t - i\sin\omega' t)(x' + iy') \\ &= (x'\cos\omega' t + y'\sin\omega' t) + i(-x'\sin\omega' t + y'\cos\omega' t)\end{aligned}$$

したがって、x-y と x'-y' 系の関係は

$$\begin{aligned}x &= x'\cos\omega' t + y'\sin\omega' t \\ y &= -x'\sin\omega' t + y'\cos\omega' t\end{aligned}$$

で、教科書 page79 の式 (5.5) とは逆方向、つまり時計方向に x'-y'系が回転している座標系でζ'をとった事がわかる。
先ほどの式 (3) の第二項の振動数ω'で回転する系に移ったわけである。つまり、その系ではこの第二項に相当する項が無くなった。その結果は、単振動の形となる。

式 (5.20) はきれいな単振動の式である。

振動数は $\sqrt{\omega_0^2 + \omega'^2}$ である。 つまり、ζ'の座標系では振り子は回転せず二次元面で振動している。 これがζ'系である。 ζ'系はζ系に対し角速度-ω' で回転している系である。 われわれの立つ座標系はζ系であり、二次元面での振動が上の角速度で回転しているのがみえる。
座標変換により現象を単純化し解析できる訳だ。
現象の本質を引き出して見える訳だ。

式 (5.20) を解く

これは単振動. 式 (4.3) を参考にせよ。 解として

$$\zeta' = A\cos(\sqrt{\omega_0^2 + \omega'^2}\, t + \beta) \tag{5}$$

をとる。ζに変換すると、

$$\begin{aligned} \zeta &= e^{-i\omega' t} A\cos(\sqrt{\omega_0^2 + \omega'^2}\, t + \beta) && (6) \\ &= x + iy && (7) \end{aligned}$$

x, y で表示すると、

$$\begin{aligned} x &= A\cos(\omega'\, t)\cos(\sqrt{\omega_0^2 + \omega'^2}\, t + \beta) && (8) \\ y &= -A\sin(\omega' t)\cos(\sqrt{\omega_0^2 + \omega'^2}\, t + \beta) && (9) \end{aligned}$$

初期値として、t=0 で x 方向の位置を Ao、y 方向をゼロと設定すると： x(t=0)=Ao、y(t=0)=0。
したがって、β=0, A=Ao。

$$\begin{aligned} x &= A_0\cos(\omega' t)\cos(\sqrt{\omega_0^2 + \omega'^2}\, t) && (10) \\ y &= -A_0\sin(\omega' t)\cos(\sqrt{\omega_0^2 + \omega'^2}\, t) && (11) \end{aligned}$$

ω' =ω sin37° = 4.4×10^{-5}/s。 ω= 7.3×10^{-5}/s. $\omega_0 = \sqrt{g/\ell}$ = 0.313/s. ω'^2 / ω_0^2 = 5.4×10^{-8} となり、
$\sqrt{\omega_0^2 + \omega'^2} = \omega_0$ と近似できる。 よって、

$$x = \mathrm{Ao}\ \cos(\omega' t)\cos(\omega_0 t), \tag{12}$$
$$y = -\mathrm{Ao}\ \sin(\omega' t)\cos(\omega_0 t). \tag{13}$$

これは、角振動数ω'（周期 T'=2π/ω' =20.1 s）で時計回りに回転する振動子（角振動数=ω_0, 周期 T_0=2π/ω_0 =1.65 日）を示す。 ω't から一日で 218 度、一時間で 9.1 度回転する。

赤道ではωが振動面内にあり、コリオリ力は振動面には働かない。 したがって、フーコーの振り子は回転せず. 一方、北極ではωがω'と一致し、一日で一周する。
コリオリ力の効果は、式（5.14）を見れば分かるように、この場合、自転の角速度ωの振動面に対する垂直成分ω'=ωsinαに基づく。 この成分は北半球では上向きであるが、南半球では下向きとなり振り子の回転方向が逆になる。