

力学

大学院理学研究科 素粒子宇宙物理学専攻
高エネルギー物理学研究室
大島 隆義

教科書:
パリティー物理学コース、太田信義著「一般物理学(上)」

4.4 強制振動

さらに若干複雑にする。振動数 ω で振動する外力を追加。

$$\text{運動方程式: } \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x + 2\mu \frac{dx}{dt} = F_0 \cos\omega t$$

この場合、運動方程式は非斉次である。解は、**解 = (一般解) + (特殊解)**と構成できる。一般解で右辺 = 0 の斉次方程式を満たし、**特殊解** で右辺 = $F_0 \cos\omega t$ を満たす。

いまの場合は、充分時間が経過した時の振動の様子は、減衰のため斉次方程式の解(物体の位置の変位)はゼロとなり、物体は止まる。しかし、周期的な外力の作用のため物体の運動も対応する周期的な定常な運動状態になると推定できる。

教科書に丁寧に解き方が書いてある。特殊解として

$$x = A \cos(\omega t - \alpha)$$

の形をとり、振動の振幅 A と位相 α を求める。 A ならびに α は式(4.25), (4.27)である。振幅、位相を図示せよ。

ここで特殊解には任意性がないことが分かる。運動方程式は2階の微分方程式であり、ふたつの任意定数があった。これらは初期状態により決められた。それらは一般解の形を決定したわけだ。

一方、特殊解として、 A ならびに α を未定の定数として用いたが、それらは任意で初期条件で決める余裕はすでに残っていない。したがって、 A 、 α は一義的に特殊解を求める過程において決められた、ことに留意せよ。

地震時の建物の振動がこれであると説明がある。固有振動数 ω_0 を基準に取り、抵抗係数 $\mu = n \omega_0$ ならびに外力の振動数 $\omega = \alpha \omega_0$ を変数として振動の様子を図示してみよう。
 n をパラメータとし振幅を α で微分し、振幅が最大になる条件を求める。

$$\alpha^2 = 1 - 2n^2$$

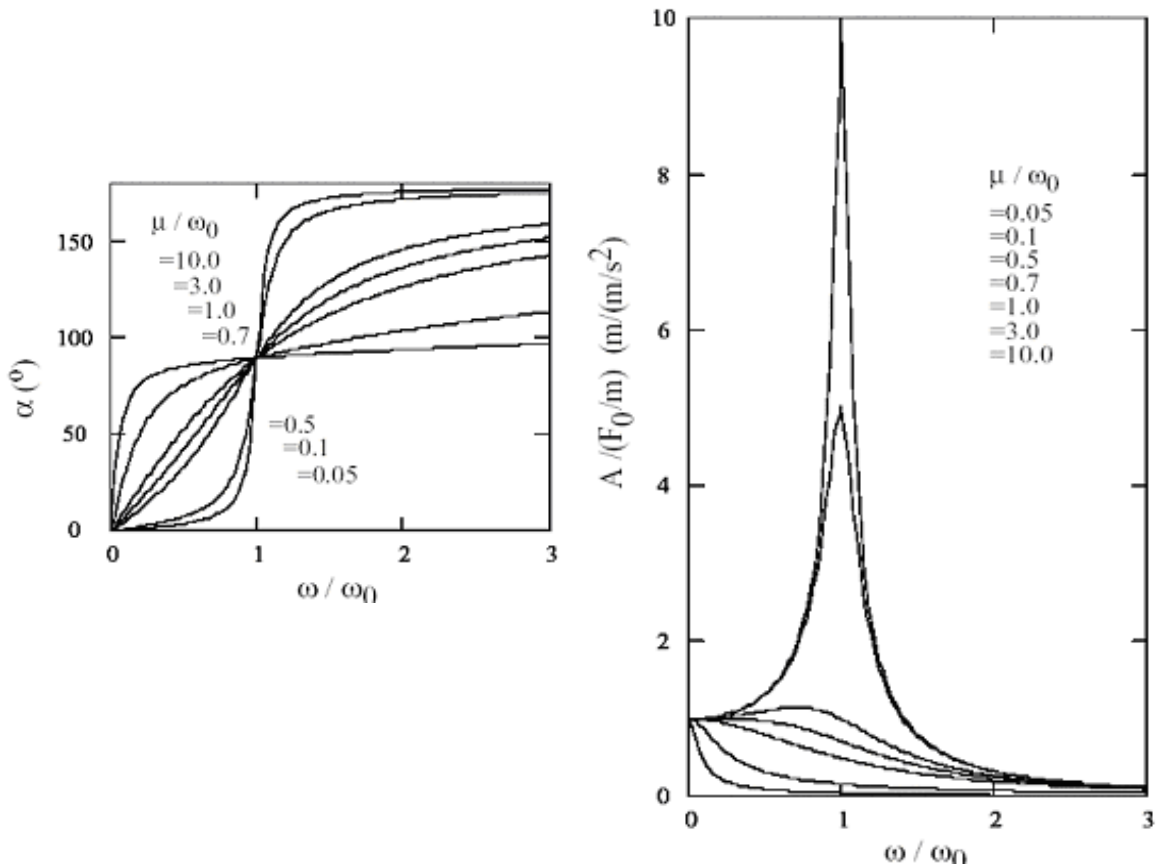
であり、最大値が存在するのは

$$n^2 < \frac{1}{2} \quad : \quad n < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

の場合のみであることが分かる。つまり、抵抗係数 μ が建物の固有振動数の $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 倍以上であれば、最大値は存在せず、 $\omega=0$ のところが振幅最大となる（地震の振動数が低いほど振幅が大きい）。

また、図から分かるように抵抗係数 μ が小さいと最大値を持ち（共振すると云う）、小さいほど共振振幅が大きくなり、かつ共振の巾が狭い。 $\mu=0$ の場合、共振振動数で振幅が理論的には無限となる。外力の振動数そのまま建物で振動する。

図から、地震で建物が大きく揺れないための条件が把握できたか？



問題 4.3.1 は面白い。

「外力のする仕事の平均」を求めよと。

平均 について

いまの場合、物体は外力により周期的な振動をする。ここで云う「平均」とは時間平均、つまり振動周期での仕事の平均値である。平均は、 $\langle \quad \rangle$ の記法を用いて表記する。

ある量 a の $t=0$ から T までの時間平均は

$$\begin{aligned} \langle a \rangle &= \frac{\int_0^T a dt}{\int_0^T dt} \\ &= \frac{\int_0^T a dt}{T} \end{aligned} \quad (1)$$

仕事量は移動距離に沿って働く力を積分したものであった。この場合は、一周期の間に働く力に対しての積分である。(外力) \times (微小な移動距離) の一周期の距離に亘る積分である。これは例によって、(外力) \times (速度) \times (微小時間) の積分に書き換えられる。つまり、

$$\int (F_0 \cos \omega t) \cdot \dot{x} dt \quad (2)$$

したがって、平均値 $\langle \quad \rangle$ は $x = A \cos(\omega t - \alpha)$ を代入すると

$$\frac{-\omega A F_0 \int_0^T \cos \omega t \cdot \sin(\omega t - \alpha) dt}{\int_0^T dt} = \frac{-\omega A F_0 \int_0^{2\pi} \cos \omega t \cdot \sin(\omega t - \alpha) d(\omega t)}{\int_0^{2\pi} d(\omega t)} \quad (3)$$

分母は 2π 。分子の被積分関数は

$$\cos \omega t \cdot \sin(\omega t - \alpha) = \cos \alpha \cdot \cos \omega t \sin \omega t - \sin \alpha \cdot \cos^2 \omega t \quad (4)$$

第一項は奇関数のためゼロ。第二項は、

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos^2 \omega t d(\omega t) &= \left[\frac{1}{4} \sin(2\omega t) \right]_0^{2\pi} + \frac{1}{2} [\theta]_0^{2\pi} \\ &= \pi \end{aligned} \quad (5)$$

(6)式の導出においては、 $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$ を積分 ($\theta = \omega t$ と書いた) し、 $\int \cos^2 \theta d\theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta + \int (1 - \cos^2 \theta) d\theta$ を変形して求めた。

よって、平均値は

$$\frac{1}{2} \omega A F_0 \sin \alpha \quad (6)$$

となる。 α は右図の角度であり、 $\sin \alpha = \frac{2\mu\omega}{\sqrt{(2\mu\omega)^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}}$, $A = \frac{(F_0/m)}{\sqrt{(2\mu\omega)^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}}$ 。したがって、

$\sin \alpha = 2\mu\omega \cdot \frac{mA}{F_0}$. 平均値は

$$A^2 m \mu \omega^2 \quad (7)$$

と求まる。

4.4 連成振動

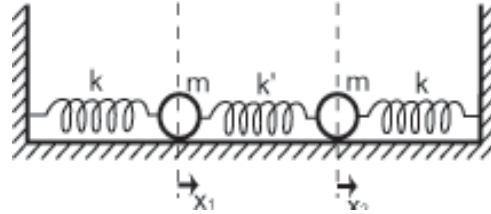
(a) 2個の質点の運動

運動方程式は2階の連立微分方程式となる。

$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 - k'(x_1 - x_2)$$

$$m\ddot{x}_2 = -kx_2 - k'(x_2 - x_1)$$

任意定数は4つ。おのおの初期条件で決まる。



x_1 と x_2 の **線形結合** の **基準座標** $Q_{\pm} = x_1 \pm \frac{x_2}{\sqrt{2}}$ を採用することにより、方程式は Q_+ 、 Q_- の独立な単振

動となる。対応して、基準振動数 ω_{\pm} も異なる(式 4.36)。

$$Q_+ = -\omega_+^2 \cdot Q_+$$

$$Q_- = -\omega_-^2 \cdot Q_-$$

なぜ基準座標をこのような形(式(4.34))にとるのか。Page63 に説明がある。この導出法を忘れるな。解析力学、量子力学で頻繁に登場するものである。

物理的に考えてみよう。

方程式をよくみると、 x_1 と x_2 は対称であることが分かる。つまり、両者を入れ替えても変わらないわけだ。どちらが特にどうと云うことはない。したがって、線形結合の両係数は等しいだろう。

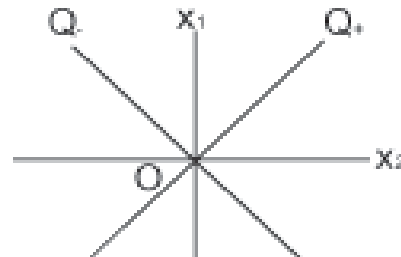
そして、運動を記述する変数は2つ要る。ひとつが和であれば、それに独立なもの(直交するもの)は差である。

右図に示すように、 Q_+ 、 Q_- は x_1 、 x_2 座標に対して、45度座標軸を回転させた座標系であることがわかる。45度回転の座標変換は

$$Q_+ = \sin 45^\circ x_1 + \cos 45^\circ x_2 = \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{2}}$$

$$Q_- = \cos 45^\circ x_1 - \sin 45^\circ x_2 = \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{2}}$$

$\frac{1}{\sqrt{2}}$ は規格化の係数である。



x_1 、 x_2 の座標系では相関のため、振動は単純に見えない。 Q_{\pm} の座標系では独立なふたつの単振動となる。したがって、系の運動エネルギーもポテンシャルエネルギーも、 Q_{\pm} の個々の振動の単純な和で表現できる。式(4.36)から分かるように、 Q_- の固有振動数の方が大きい。

x_1 、 x_2 で振動を見ると、図4.5にあるように、うなり現象の振動が見える。

教科書には丁寧に計算法が記述してあるので、よく学べ。

(b) N個の質点の運動

少し各式の導出が複雑となるが、論理的に追っていけばよい。

ただし、式(4.51)の間違いに気付かないと大変だ。(1 + 4cos²θ) でなく正しくは (-1+4 cos²θ)。

特に、式(4.58)は多少戸惑うかもしれない。式(4.46)と(4.57)の同等性から $N-r-1$ に置き換え A_r を求めよ。この場合、 θ を決めるのに式(4.45)に対応するものはない。 $A_2^{(p)}=c_p A_1^{(p)}$ を使う。その結果、 $\theta = \frac{p\pi}{N+1}$ となる。 A_r の p に関する成分は式(4.57)で各項のべき数が等しく任意にとりうる。ここでは $A^{(p)}$ と書いてある。初期条件で決める定数である。