力　学

大学院理学研究科　素粒子宇宙物理学専攻

高エネルギー物理学研究室

大島　隆義

教科書：
　パリティー物理学コース、太田信義著「一般物理学（上）」

4．2　*減衰振動*

単振動を若干複雑にする。

速度に比例する抵抗項を追加。 すでに2．5節で学んだ粘性抵抗である。

運動方程式： $$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - 2m\mu\frac{dx}{dt}.$$

両辺をmで割ると、

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0{}^2x - 2\mu\frac{dx}{dt}.$$

単振動（$\omega_0{}^2 = \frac{k}{m}$ であり、バネの固有振動数）に粘性抵抗力（右辺第二項）が加わった。μ は比例係数である。

方程式の解き方は教科書に丁寧に書いてある。よく読むこと。固有振動数 ω_0 と抵抗係数 μ の関係で振動の様子が異なることが理解できるはず。

(a)　$\omega_0{}^2<\mu^2$ の場合の減衰振動は p.59 の図 4.2 をみよ。

(b)　$\omega_0{}^2>\mu^2$ の場合の過減衰（振動がない）の様子を下図　（簡単のため $B_1=B_2=1$ (m), $m=\omega_0$ とした）　に載せる。
減衰の様子は式(4.19)から、早く減衰する項（指数関数の肩の数値が大きいもの）とゆっくり減衰する項があることに気付け。

(c)　$\omega_0{}^2=\mu^2$ の場合の臨界減衰(振動がない)の様子を下図に載せる。
教科書には自動扉がゆっくりと閉まるのはこれだと書いてある。
式(4.20)を自分で図示し、この意味を知れ。

問題　4．2．1　は面白い。

「力学的エネルギーの変化を求めよ」 と云うこと。

● 教科書 page48 に記してあるように、力学的エネルギーとは

(運動エネルギー) ＋ (ポテンシャル·エネルギー)

である。いまの場合、抵抗力が存在するためエネルギーの散逸が起こり、力学的エネルギーの保存は成り立たないことを知ること。

● さて、エネルギーの様子を考えてみよう。

エネルギーとは仕事をする潜在的な能力である。Page39 にあるように、運動方程式、つまり、力Fに速度 $\dot{x}$ ($=\frac{dr}{dt}$)

を掛けて t で積分すると仕事が求まる。

$$\int \boldsymbol{F} \cdot \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \int \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{1}$$

まず、$\dot{x}$ を掛け、変形すると

$$m\ddot{x}\dot{x} + kx\dot{x} = -2m\mu\dot{x}^2 \tag{2}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2\right\} = -2m\mu\dot{x}^2 \tag{3}$$

上式左辺の第一項は運動エネルギー、第二項がポテンシャルエネルギーである。つまり、力学的エネルギーの時間による変化率を示している。右辺がゼロであればエネルギー保存が成り立つが、いまの場合は負の値を持つ。エネルギーの変化率が常にマイナスということは、抵抗力のためエネルギーを失い続けることを云う。

充分長い時間が経てば、x も $\dot{x}$ もゼロになり、(3)式の両辺は当然ゼロ。

● (3)式を t=0 から t=T まで時間積分してみよう。左辺は

$$\int_0^T \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2\right\}\mathrm{d}t = \int_0^T \mathrm{d}E(x,\dot{x};\ t) = E(x,\dot{x};\ T) - E(x,\dot{x};\ 0) \tag{4}$$

ここで、時間 t に位置ならびに速度が x, $\dot{x}$ であるときの力学的エネルギーを $E(x,\dot{x};\ t)= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$ と書いた。第二項は初期のエネルギーであり、第一項は t=T でのエネルギー値である。したがって、負の値をもつ。外部に仕事をしたという訳だ。

右辺の積分は、

$$-2m\mu\int \dot{x}^2\mathrm{d}t \tag{5}$$

条件により異なる x (式(4.17), (4.18), (4.19)) を代入すればよいのだが、積分は大変複雑となる。

一応、参考までに (4.17) の場合を記しておこう。

x を微分して整理すると、

$$\dot{x} = -x\left[\mu + \kappa\cdot\tan(\kappa t + \delta)\right] \tag{6}$$

ここで、$\kappa = \sqrt{\omega_0^2 - \mu^2}$。 これを(5)に代入すると、多少長い計算の後に

$$
\begin{aligned}
&-2m\mu\int \dot{x}^2 \mathrm{d}t \\
&= -2mA^2\left[e^{-2\mu T}\left\{\mu\kappa\cdot\sin\left(2(\kappa T+\delta-\gamma)\right)-2\mu^2\cdot\cos^2(\kappa T+\delta-\gamma)-\kappa^2\right\}\right. \\
&\qquad\left.+\left\{\mu\kappa\cdot\sin\left(2(\delta-\gamma)\right)-2\mu^2\cdot\cos^2(\delta-\gamma)-\kappa^2\right\}\right]
\end{aligned} \tag{7}
$$

となる。$\gamma=\tan^{-1}\left(\frac{\kappa}{\mu}\right)$である。

線形、 斉次、 重ね合わせ

教科書 60page に**斉次方程式**と云う言葉がでる。また、すでにどこかに**線形**という言葉もあったと思う。これらは物理で非常に重要な**重ね合わせ**の数学的表現である。少し学んでおこう。

式(4.21)のように x, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$, ... に関して1次以上の項を含まない微分方程式を x と時間微分について **線形** であるという。また、次数は揃っているため、 **斉次** であるという。「斉」とは、揃うこと、等しいことを意味する。 同次(homogeneous) とも云う。 一方、高次のべきが含まれるとき **非線形** という。 多くの物理現象は線型方程式で近似できる.

運動方程式の線形(斉次)方程式では、任意の2つの解の和はそれ自身が一つの解である、ことはすでに page32 で分かった。非線形ではどうか？

例として、簡単な単振動の運動方程式をとる。

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-\omega^2x \tag{1}$$

確かに、線形、斉次である。 解のひとつを a、もう一つを b としよう。そうすれば、

$$\frac{\mathrm{d}^2a}{\mathrm{d}t^2}=-\omega^2a \quad ; \quad \frac{\mathrm{d}^2b}{\mathrm{d}t^2}=-\omega^2b \tag{2}$$

が解である。これらを足し合わせると、

$$\frac{\mathrm{d}^2(a+b)}{\mathrm{d}t^2}=-\omega^2(a+b) \tag{3}$$

となり、a＋b も解であることは明らかである。

しかし、非線形の場合として、

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-\omega^2x^2 \tag{4}$$

を考えると、a, b は解として $\frac{\mathrm{d}^2a}{\mathrm{d}t^2}=-\omega^2a$; $\frac{\mathrm{d}^2b}{\mathrm{d}t^2}=-\omega^2b$ を満足するが、足したものは

$$\frac{\mathrm{d}^2(a+b)}{\mathrm{d}t^2}=-\omega^2(a^2+b^2) \tag{5}$$

である。a＋b が解であるためには、(5)式の右辺は

$$-\omega^2(a+b)^2 \tag{6}$$

でなければならない。非線形では二つの解の和は解でないことがわかる。ここでは簡単のため、任意定数は省いた。$x=\kappa_1a+\kappa_2b$ (任意定数κ_1、κ_2) が一般形である。

このように任意の解の和は、**物理的には重ね合わせ**と云い、多くの物理現象の原理となる。