Mathematicaによる代数計算

講義内容

1. 厳密解と近似解
2. 組み込み定数
3. 組み込み関数
4. 複素数演算
5. 多項式展開
6. 部分分数展開
7. 代数方程式の解法

組み込み定数

円周率	**Pi** → 3.1419265…
自然対数の底	**E** → 2.71828
虚数単位 $I=\sqrt{-1}$	**I**
無限大 ∞	**Infinity**
角度 $\frac{p}{180}$	**Degree**
不定値	**Indeterminate**

厳密値と近似値の変換

厳密値を近似値に変換する方法

N[変数(数値),桁数]

数値の精度を評価する方法

Precision[変数(数値)]

四捨五入　Round[変数(数値)]

切り捨て　Floor[変数(数値)]

切り上げ　Ceiling[変数(数値)]

数値誤差の切り捨て

Chop[変数(数値)]

練習1

```
In[1]:= Pi

Out[1]= π
```

```
In[9]:= N[Pi, 10]

Out[9]= 3.141592654
```

有効数字10桁

```
In[5]:= Precision[Pi]

Out[5]= ∞
```

無限大の精度

練習2

```
In[11]:= Round[10000 Pi]

Out[11]= 31416

In[12]:= Floor[10000 Pi]

Out[12]= 31415

In[14]:= Ceiling[10000 Pi]

Out[14]= 31416

In[17]:= Chop[10000 Pi]

Out[17]= 10000 π
```

誤差のない表現

組み込み関数

三角関数	Sin, Cos, Tan
逆三角関数	ArcSin, ArcCos, ArcTan
対数関数	Log
指数関数	Exp
絶対値	Abs
割り算の余り	Mod
最大、最小	Max, Min

練習3

In[19]:= Sin[Pi / 6]

Out[19]= $\frac{1}{2}$

ラジアン表示

In[22]:= Sin[30 Degree]

Out[22]= $\frac{1}{2}$

Degree表示

In[20]:= ArcTan[1]

Out[20]= $\frac{\pi}{4}$

複素数演算

1. 複素数の定義
   - 虚数単位を用いて定義する。
2. 複素数の実部と虚部
   Re[虚数]，Im[虚数]
3. 絶対値と偏角　Abs[虚数]，Arg[虚数]
4. 標準形への変換
   ComplexExpand[虚数]

練習4

In[23]:= **z = 4 + 3 I**

複素数zの定義

Out[23]= 4 + 3 I

In[25]:= **{Re[z], Im[z]}**

Out[25]= {4, 3}

In[26]:= **{Abs[z], Arg[z]}**

Out[26]= $\{5, \text{ArcTan}\left[\frac{3}{4}\right]\}$

多項式の整理

1. 多項式の因数分解
   Factor[式]
2. 多項式標準形への展開
   Expand[式]
3. 同類項をまとめる
   Collect[式]
4. 特定の変数のべき乗の係数リストの作成
   CoefficientList[式, 変数名]

練習5

```
In[34]:= eq = Expand[(a + a^2 x + x^2)^3]
```

Out[34]= $a^3 + 3\,a^4\,x + 3\,a^2\,x^2 + 3\,a^5\,x^2 + 6\,a^3\,x^3 + a^6\,x^3 + 3\,a\,x^4 + 3\,a^4\,x^4 + 3\,a^2\,x^5 + x^6$

```
In[35]:= Collect[eq, x]
```

Out[35]= $a^3 + 3\,a^4\,x + (3\,a^2 + 3\,a^5)\,x^2 + (6\,a^3 + a^6)\,x^3 + (3\,a + 3\,a^4)\,x^4 + 3\,a^2\,x^5 + x^6$

```
In[39]:= CoefficientList[eq, a]
```

Out[39]= $\{x^6,\ 3\,x^4,\ 3\,x^2 + 3\,x^5,\ 1 + 6\,x^3,\ 3\,x + 3\,x^4,\ 3\,x^2,\ x^3\}$

部分分数分解

1. 部分分数への展開
   Apart[式]
2. 展開されたものをまとめる
   Together[式]
3. まとめた式を簡略化(整理)
   Simplify[式]

練習6

In[40]:= `eq = 1/(x^3 - 1)`

Out[40]= $\frac{1}{-1+x^3}$

In[41]:= `Apart[eq]`

Out[41]= $\frac{1}{3\,(-1+x)}+\frac{-2-x}{3\,(1+x+x^2)}$

In[42]:= `Together[%]`

Out[42]= $\frac{1}{(-1+x)\,(1+x+x^2)}$

代数方程式の解法

厳密解を得る方法

- Solve[式，変数名]
  - 5次以上の多項式の解は一意に求まらない。
  - そのときは、以下の方法を用いる。

近似解を得る方法

- NSolve[式，変数名]

練習7

イコール2個

```
In[44]:= Solve[x^3 - 19 x + 30 == 0, x]
```

Out[44]= $\{\{x \to -5\}, \{x \to 2\}, \{x \to 3\}\}$

```
In[51]:= Solve[x^3 - 8 == 0, x]
```

Out[51]= $\{\{x \to 2\}, \{x \to -2\,(-1)^{1/3}\}, \{x \to 2\,(-1)^{2/3}\}\}$

In[52]:= ComplexExpand$[\{2, -2\,(-1)^{1/3}, 2\,(-1)^{2/3}\}]$

Out[52]= $\{2, -1 - I\sqrt{3}, -1 + I\sqrt{3}\}$

練習8

In[2]:= **Solve[x^5 + 3 x^4 + x^3 + 14 x^2 + 8 == 0, x]**

Out[2]= {{x → Root[8 + 14 #1^2 + #1^3 + 3 #1^4 + #1^5 &, 1]},
{x → Root[8 + 14 #1^2 + #1^3 + 3 #1^4 + #1^5 &, 2]},
{x → Root[8 + 14 #1^2 + #1^3 + 3 #1^4 + #1^5 &, 3]},
{x → Root[8 + 14 #1^2 + #1^3 + 3 #1^4 + #1^5 &, 4]},
{x → Root[8 + 14 #1^2 + #1^3 + 3 #1^4 + #1^5 &, 5]}}

正確に求められない

In[3]:= **NSolve[x^5 + 3 x^4 + x^3 + 14 x^2 + 8 == 0,
x]**

Out[3]= {{x → -3.76289}, {x → 0.0111303 - 0.816663 ⅈ},
{x → 0.0111303 + 0.816663 ⅈ},
{x → 0.370317 - 1.74643 ⅈ},
{x → 0.370317 + 1.74643 ⅈ}}

Newton法による数値解法

1. 関数のグラフを描く。
   - Plotコマンドなどを用いてグラフを描く
2. グラフより変数の初期値を得る。
   - グラフとx軸の交点付近の値を初期値に選ぶ。
3. FindRootコマンドを用いて、Newton法により数値解を得る。

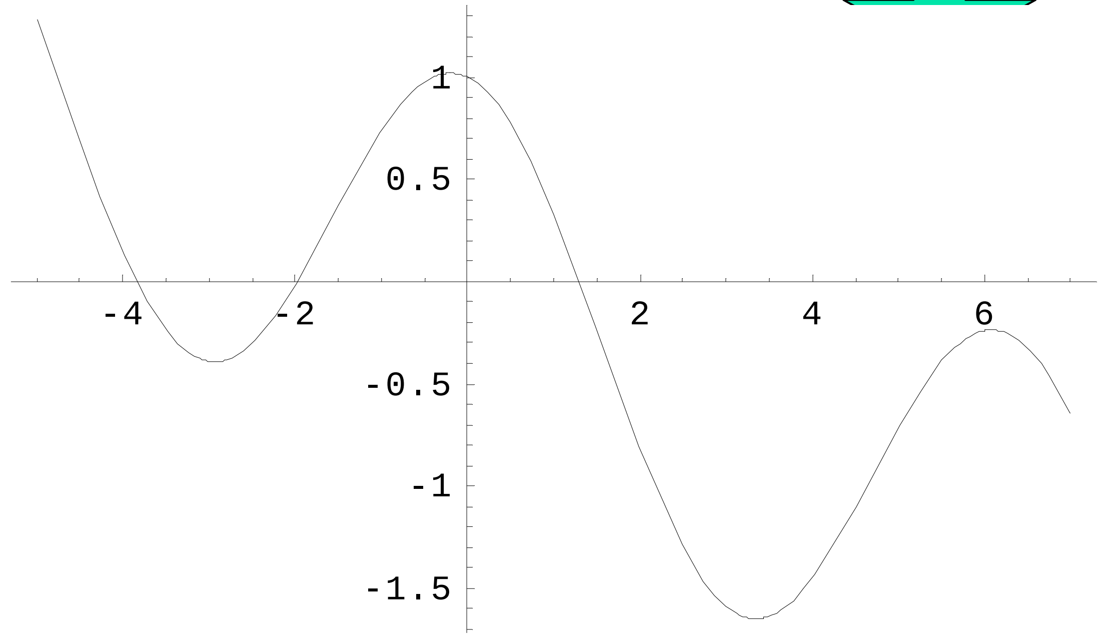
   FindRoot[式，{変数名，変数の初期値}]

   - 収束計算により近似解を得る。

練習9

0<x<1, x=-4,-2付近に
解があることがわかる

```
Plot[Cos[x] - x / 5, {x, -5, 7}]
```




```
FindRoot[Cos[x] - x / 5 == 0, {x, 2}]
```

$\{x \to 1.30644\}$