△ 復習　　Feb 7　2007　　0

(ほとんどの) フーリエ ~~関数~~ 級数(展開)

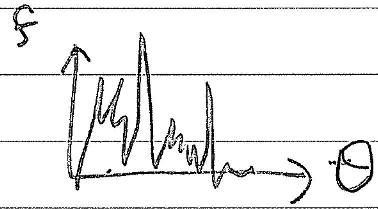
円周上の周期 | 関数 は

1. $$f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\theta}$$

2. $$C_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-in\theta} f(\theta)\, d\theta$$

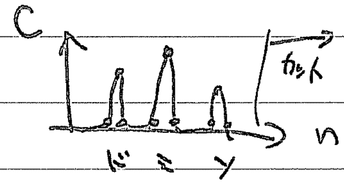
似ている

3. $$\delta_{n,0} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{in\theta}\, d\theta$$



注　f(θ) と C_n の情報量は同等

応用　・画像しょり
・圧縮 ~~...~~　{ ケータイデンワ / おもし
・CT
・イコライザー



注 { ・$C_n < 0 \Rightarrow$ うらをたたく.
・周期的
・$C_n \in \mathbb{R} \Rightarrow$ cos or sin.

クロスムニダ

今回　周期的でない場合

フー

① 直線上

運動量の固有状態 e^{ikx}

円周上 ⇒ $k \in \mathbb{Z}$ とびとび　$\psi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$ 和

直線上 ⇒ $k \in \mathbb{R}$ 連続　$\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} c(k) e^{ikx} dk$ 積分

	円周上	直線上
固有値 k	$\mathbb{Z}$ とびとび	$\mathbb{R}$ 連続
$\psi(x) =$	$\sum_k c_k e^{ikx}$ 和	$\int c(k) e^{ikx} dk$ 積分
係数	c_k 数	$c(k)$ 関数

② フーリエ変換

命題 "任意の"関数 $\psi(x)$ は次の様に書ける

1. $\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{ikx} \phi(k)$

2. $\phi(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ikx} \psi(x)$

同等

3. $\delta(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ikx}$

注意

1. k積分, ~~区間は広くはできる.~~
2. ~~区間を広くとればいい~~

注 3. $\overset{x}{=}$ $\delta(k) = \begin{cases} 0 & k \neq 0 \\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk = \infty & k = 0 \end{cases}$

命題 1を仮定すると

証 $3 \Longleftrightarrow 2$

∵ $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ik'x} \psi(x)$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dx\, e^{-ik'x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dk\, e^{ikx} \phi(k)$

入れかえ

$= \int dk \left(\frac{1}{2\pi} \int dx\, e^{i(k-k')x} \right) \phi(k) \underset{②}{=} \phi(k')$

$\overset{③}{=} \delta(k-k')$

//

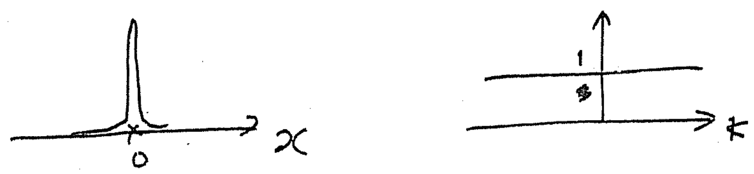
例

$\boxed{3}$ ~~位置表示と運動量表示.~~

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{ikx}\, \phi(k)$$

$$\psi(x) \longleftrightarrow \phi(k)$$

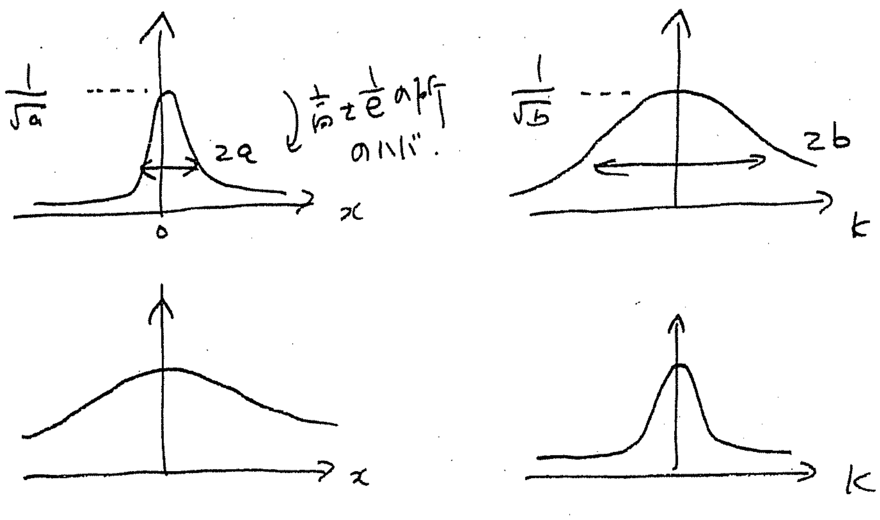
$$\delta(x) \longleftrightarrow 1$$



* 正規分布

$$a \cdot b = 1$$

$$\frac{1}{\sqrt{a}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^2} \longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{b}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{k}{b}\right)^2}$$



注　$a^2 =$ 分散

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x}_i)^2$$

平均からのズレの2乗和

予想	$\psi(x)$のはば	$\xleftrightarrow{\text{逆比例?}}$	$\phi(k)$の幅

$\Delta x \cdot \Delta k$

[4] 位置表示と運動量表示

~~{ψ(x) : 位置表示 / φ(k) : 運動量 〃}~~

★ 位置のかくりつで $\psi(x) \longrightarrow \delta(x-x_0)$ となるかくりつ $= |\psi(x_0)|^2$

★ $\psi(x) = \cancel{\int dx_0\, \delta(x-x_0)\, \psi(x_0)}$
$\int dk\, e^{ikx}\, \phi(k)$

重ね合わせの係数

運動量のかくりつで

$\psi(x) \longrightarrow e^{ikx}$ となるかくりつ $= |\phi(k)|^2$

対等

~~★ $\psi(x) = \int dx_0\, \delta(x-x_0)\, \psi(x_0)$~~

~~位置のかくりつで~~

~~$\psi(x) \longrightarrow \delta(x-x_0)$ となるかくりつ $= |\psi(x_0)|^2$~~

{ $\psi(x)$: 位置表示の波動関数
{ $\phi(k)$ 運動量 〃

フーリエ変換で 運動量の情報もわかる

[5] フーリエ変換の応用例を説明してみる

原理

⑤ 不確定性 ~~原理~~

$$\boxed{\text{命題} \quad \Delta x \, \Delta k \gtrsim 1} \Longrightarrow \text{きどうがない.}$$

位置のかんそく x : $x\,\delta(x-x_0) = x_0\,\delta(x-x_0)$

運動量 : $-i\dfrac{d}{dx}$: $-i\dfrac{d}{dx} e^{ikx} = k\, e^{ikx}$

☆ 順番が大事

$$x\frac{d}{dx}f(x)$$
$$\ne$$
$$\frac{d}{dx}x f(x) = \cancel{\ } x\frac{d}{dx}f(x) + f(x)$$

$$\left(x\frac{d}{dx} - \frac{d}{dx}x\right)f = f$$
$$\ne 0$$

∴ x と $\dfrac{d}{dx}$ は非可換 ~~(代数)~~

実は これが $\Delta x \Delta k \gtrsim 1 \ne 0$ の原因

$$\boxed{\text{不確定性原理}}$$

$\Delta x \, \Delta k \gtrsim 1$

きどうがない

$\boxed{\text{フーリエ変換}}$

$$\psi(x) = \int e^{ikx} \phi(k)$$

$\boxed{\text{非可換代数}}$

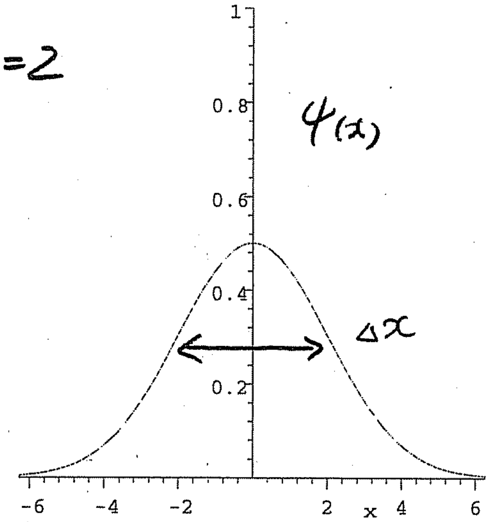
$$x\frac{d}{dx} - \frac{d}{dx}x = 1$$

✡ Gauss分布のFourier変換

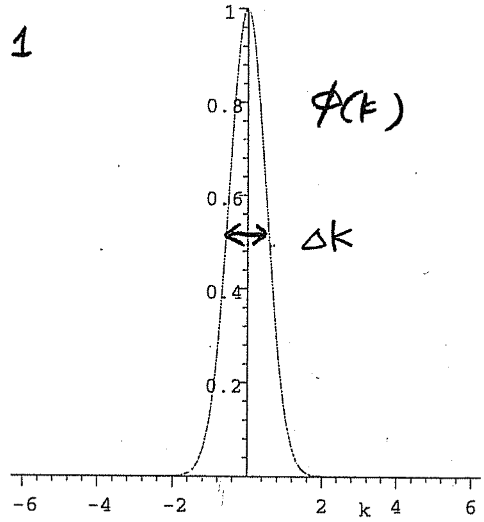
$$
\begin{cases}
\psi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{ikx} \cdot \phi(k) \\
\psi(x) = \dfrac{c}{\sqrt{a}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^2} \qquad \phi(k) = \dfrac{c}{\sqrt{b}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{k}{b}\right)^2}
\end{cases}
$$

1. $a=2$

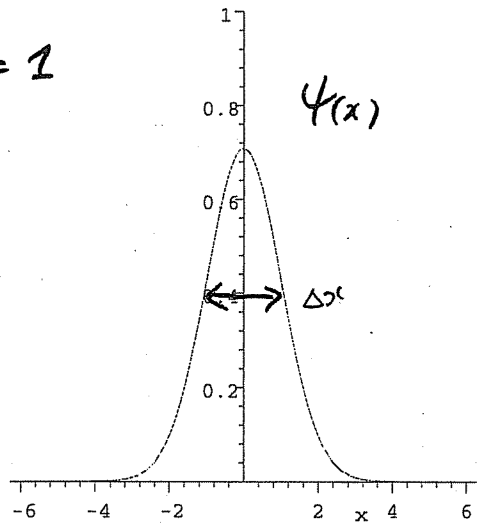
$a \cdot b = 1$



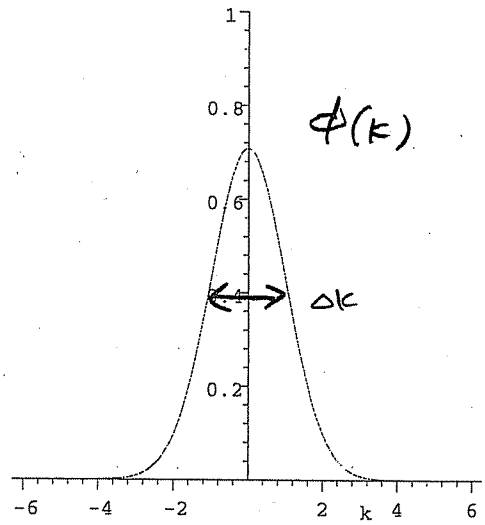
$\Longleftrightarrow$



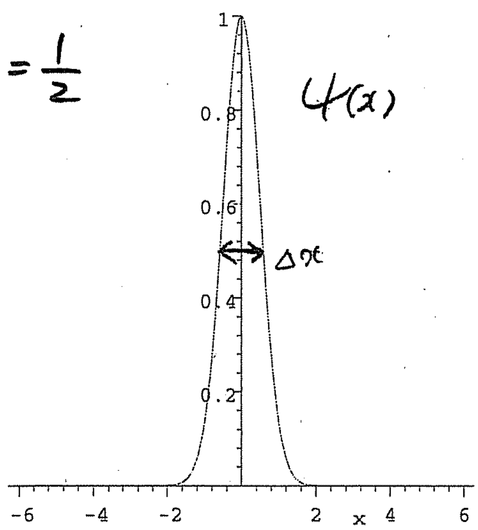
2. $a=1$



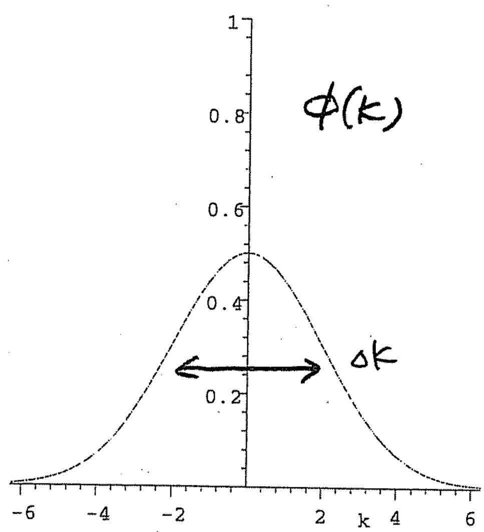
$\Longleftrightarrow$



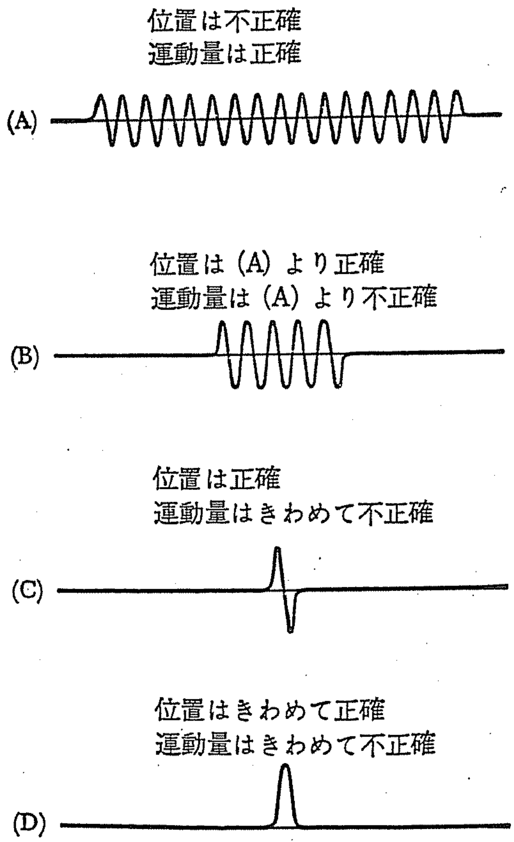
3. $a=\frac{1}{2}$



$\Longleftrightarrow$



☆ 不確定性関係



運動量 ～ $\hbar$/波長

$\Delta x \Delta p \sim 1$

図 5ABCD 位置-運動量の不確定性関係の議論を示すもの．位置が正確に定められるには短い波が必要であり，正確に運動量が定められるにはきれいに広がり多くの周期が繰り返される正弦状の波が必要である．二つの要求は互いに矛盾している．

バークレー物理学コース 4：量子物理・下