付録A　集合と写像

集合の考えは高校でも学ぶのだが、それと切り離せない関係にある写像の概念が抜け落ちていることもあり、不十分なものとなっている。この集合と写像は、数学のみならず、様々な関係を記述理解する上できわめて重宝するもので、大学教育の中の柱の一つに据えてしかるべきものではあるが、現状、数学科の学生でもない限り組織的に学ぶようにはなっていない。国際化とか global とかいう前に、こういった universal とでも呼ぶべき部分の整備が何よりも大切の米百俵かな。具体的な内容は昔の講義ノート「集合入門」*109を見てもらうことにして、ここでは、用語にまつわるちょっとしたお遊びで息抜きを*110。

数学に限らないが、日本での専門用語が難しすぎる。一番の原因は、漢字の組み合わせによる新語を乱造したところにあって、ここでのお遊びのルールは、集合と写像に関する用語を可能な限り和語に置き換えて、その感触を楽しむというものである。

まずは集合である。これは、Menge (ドイツ語、量、かさ、群れ)、ensemble (フランス語、一緒に)、set (英語、ひとまとまり) のどれかからの翻訳であろう。あるいは、離合集散という漢語との関連も考えられるか。さて、これを何と言い換えるか。ここは素直に、「あつまり」としておく。そして、写像。こちらは map (英語), application (フランス語), Abbildung (ドイツ語) からの意味を混ぜあわせたような造語であるか。これは写しとか移しの漢字を当て分けせずに「うつし」でよかろう。以下、常用語との対応表を掲げておく。

集合	set	あつまり
要素・元	element	つぶ
部分集合	subset	したあつまり
?	supset	うえあつまり
空集合	empty set	からあつまり
全体集合	universal set	おおあつまり
補集合	complement	のこり
差集合	difference set	のぞき
合併集合	union	あわせ
共通部分	intersection	むすび
積集合	product set	くみあつまり

写像	map	うつし
恒等写像	identity map	ままうつし
合成	composition	かさね
像	image	うつしさき
逆像	inverse image	うつしもと
逆写像	inverse map	さかうつし
単射	injection	もどりうつし
全射	surjection	おほひうつし
全単射	bijection	もどりおほひ
定義域	domain	おこり
値域	range	おわり

さあ、始めよう。集まりとは、ここでは数学的に区別がつくものの集まりをいう。一つの集まり A に対して、そのなかに含まれるものを A の粒とよぶ。

二つの集まり A, B で A の粒がすべて B の粒であるとき、A を B の下集まり、B を A の上集まりと呼んで、$A \subset B$ あるいは $B \supset A$ のように表す。また、

$$A \cup B = \{c; c \in A \text{ または } c \in B\}, \quad A \cap B = \{c; c \in A \text{ かつ } c \in B\},$$

をそれぞれ、A と B の合わせ、結びとよぶ。さらに、A から B を除いた集まりを

$$A \setminus B = \{a \in A; a \notin B\}$$

*109 http://sss.sci.ibaraki.ac.jp/teaching/set/set2005.pdf

*110 世の中には本当に冗談の通じない人がいるもので、願わくは、そういう方々とは関り合いにならずに死にたいもの。

とかいて、A の B 除きと称える。

二つの集まり A, B に対して、A の粒 a と B の粒 b の組を (a,b) と書いて、このような組すべての集まりを組集まりとよび、$A \times B$ という記号で表す。組は二つに限らず何個でも考えられて、例えば三個の集まり A, B, C の組集まりを $A \times B \times C$ のように書く。とくに、組をとる集まりがすべて A の場合は、$A \times \cdots \times A = A^n$ とも書く。

二つの集まり A, B を考える。A の粒 a に B の粒 b を対応させる規則があるとき、その規則のことを A から B への「うつし」と言って、$f : A \to B$, $a \mapsto b = f(a)$ のように書く。また、A を「うつし f の起こり」、B を「うつし f の終わり」という言い方もする。集まり A から集まり B へのうつし全体がまた集まりとなる。これを B^A という記号で表す。

A から A へのうつしで、$f(a) = a$ であるものを「ままうつし」といい、I_A という記号で表す。また、$f : A \to B$, $g : B \to C$ という二つのうつしに対して、$a \mapsto g(f(a))$ で定められる A から C へのうつしを f と g の重ねと呼び、$g \circ f$ という記号で表す。重ねを表す $\circ$ はしばしば省略され、gf のようにも書かれる。重ねうつしについては結合法則が成り立つ。

異なる粒を異なる粒にうつすようなうつしを「戻りうつし」という。うつし先の粒をもとの粒に戻すことができることにちなむ。終わりに含まれるすべての粒がうつし先として表れるようなうつしを「覆ひうつし」と呼ぶ。戻りうつしで覆ひうつしでもあるものを「戻り覆ひ」とよぶ。もどり覆ひ $f : A \to B$ があれば、B の粒 b に A の粒 a を $b = f(a)$ となるように対応させることができるので、B から A へのうつしが定まる。これを「逆うつし」といい、f^{-1} という記号で表す。逆うつしと元のうつしを重ねたものは、ままうつしとなる。

うつし $f : A \to B$ と下集まり $A' \subset A$, $B' \subset B$ に対して、

$$f[A'] = \{f(a'); a' \in A'\}, \quad f^{-1}[B'] = \{a \in A; f(a) \in B'\}$$

をそれぞれ、A' のうつし先、B' のうつし元という。

そろそろあきれ顔が見えるようで、これくらいにしておこう。まあ、遊びは遊びとしても、漢字由来の言葉はできれば控えたいもの。これは、決して国粋のためなんかではなく、散々に傷ついた日本語への罪滅ぼしの気持ちから[*111]。

付録B　固有値の存在

複素数のことを少し復習しておこう。複素数 $z = x + iy$ に極座標表示 $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ を代入した $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ を z の極形式 (polar form) というのであった。複素数をその絶対値 $r = |z|$ と単位ベクトルに相当する偏角部分 $\cos\theta + i\sin\theta$ の積に分解した形になっている。この偏角部分をオイラーに従って $e^{i\theta}$ と表記すると、三角関数の加法公式が指数法則 $e^{i\theta}e^{i\varphi} = e^{i(\theta+\varphi)}$ に集約されるなど都合がよい。指数法則を一般の複素数にまで広げて、$e^{\alpha+i\beta} = e^{\alpha}e^{i\beta} = e^{\alpha}(\cos\beta + i\sin\beta)$ と定める。

次は「代数学の基本定理」と呼ばれることが多いが、固有値の存在定理でもある。

定理 B.1. 複素係数の多項式 $f(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + \cdots + c_n$ は、複素数 $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ を使って $f(z) = (z - \zeta_1) \cdots (z - \zeta_n)$ と因数分解される。

Proof. (i) 定数ではない多項式 $f(z)$ に対して、$f(\zeta) = 0$ となる複素数 ζ の存在を示す。$|f(z)|$ が z の連続関数であり $\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = \infty$ となることから、$|f(z)|$ の最小値を与える ζ が存在する。$f(z)$ を $z - \zeta$ の

[*111] 詳しくは、高島 俊男「漢字と日本人」(文春新書) を見よ。実にこれは目からウロコの快著なり。

べきを使って、

$$f(z) = f_0 + f_l(z-\zeta)^l + f_{l+1}(z-\zeta)^{l+1} + \cdots + f_n(z-\zeta)^n, \quad f_l \neq 0$$

と表す。もし $f_0 \neq 0$ であれば、$|z-\zeta|$ を小さく取り、$z-\zeta$ の偏角を調整することで、$|f(z)| < |f_0|$ とできて、$|f_0| = |f(\zeta)|$ が最小値であることに逆らうので、$f(\zeta) = 0$ である。

(i) より $f(z)$ は $z-\zeta$ で割り切れるので、その商に (i) を適用して、という操作をくり返す。 □

付録C　不変部分空間と直和分解

対角化可能でない一次変換ないしは正方行列においても対角化に準ずる表示方法を説明しよう。その際に基本となるのが不変部分空間による直和分解 $\mathbb{C}^n = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$ である。

直和分解に合わせた基底に関して A を行列表示すると、

$$\begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_r \end{pmatrix}$$

のように対角型分割表示が得られ、A の情報がブロックごとの情報 A_i に還元させられるのがみそである。

そこで、行列 A の対角化がかなわぬまでも、各ブロック成分 A_i ができるだけ単純なものになるような直和分解を試みよう。A の固有値 λ に対して、**拡大固有空間** (generalized eigenspace) V^λ を、

$$V^\lambda = \{v \in \mathbb{C}^n; \exists m \geq 1, (\lambda I_n - A)^m v = 0\}$$

で定める。V^λ は、通常の固有空間 V_λ を含む部分空間であり、A と $(\lambda I_n - A)^m$ の積が交換可能であることから、不変部分空間となっている。

定義の中の $(\lambda I_n - A)^m v = 0$ となる $m \geq 1$ は、v ごとに違っていても良いのであるが、

$$\ker(\lambda_A) \subset \ker(\lambda - A)^2 \subset \cdots \subset \ker(\lambda - A)^m \subset \cdots$$

という部分空間の増大列を考えると、これら部分空間の次元が n 以下であることから、$\ker(\lambda - A)^m = \ker(\lambda - A)^{m+1}$ となる最初の $m \geq 1$ が存在する。そして、これ以降は、

$$\ker(\lambda - A)^{m+2} = (\lambda - A)^{-1}[\ker(\lambda - A)^{m+1}] = (\lambda - A)^{-1}[\ker(\lambda - A)^m] = \ker(\lambda - A)^{m+1} = \ker(\lambda - A)^m$$

となるので、すべて一致する。とくに、$V^\lambda = \ker(\lambda - A)^m$ である。この m を V^λ の長さとよぶ。

補題 C.1.

$$\mathbb{C}^n = \ker(\lambda - A)^m \oplus (\lambda - A)^m \mathbb{C}^n.$$

Proof. まず、$\ker(\lambda-A)^m \cap (\lambda-A)^m\mathbb{C}^n = \{0\}$ である。実際、$v \in \ker(\lambda-A)^m \cap (\lambda-A)^m\mathbb{C}^n$ を $v = (\lambda-A)^m w$ と表せば、$0 = (\lambda - A)^{2m} w$ より、$w \in \ker(\lambda - A)^{2m} = \ker(\lambda - A)^m$ となるので、$v = (\lambda - A)^m w = 0$ が従う。あとは、次元の関係式 $\dim \ker T + \dim T^n\mathbb{C} = n$ に注意すればよい。 □

さて、この直和分解によるブロック表示成分をそれぞれ、A_λ, B_λ としよう。このとき、λ は B_λ の固有値ではない。というのは、もし、λ が B_λ の固有値であれば、$0 \neq w \in (\lambda - A)^m\mathbb{C}^n$ で、$Aw = \lambda w$ となるものが存在し、$w \in \ker(\lambda - A) \cap (\lambda - A)^m\mathbb{C}^n$ となってしまう。

そこで、A を B_λ で置換えたものに今の議論を適用すると、固有値ごとに拡大固有空間を分離することができて、次の前半部分を得る。後半部分は、A を V^{λ_i} に制限したものの固有値は λ_i のみであること、制限したものの表現行列が上三角行列 A_i になるように基底をとってきて、$(\lambda_i - A_i)^{n_i} = 0$ に注意すればわかる。

定理 C.2. A の固有値を $\{\lambda_i\}_{1\le i\le r}$ とすれば、

$$\mathbb{C}^n = V^{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V^{\lambda_r}.$$

さらに、A の固有多項式を $\det(tI_n - A) = (t-\lambda_1)^{n_1}\cdots(t-\lambda_r)^{n_r}$ にように因数分解すれば、$n_i = \dim V^{\lambda_i}$ $(i = 1,\cdots,r)$ であり、$V^{\lambda_i} = \ker(\lambda_i - A)^{m_i}$, $m_i \le n_i$ が成り立つ。ここで、m_i は V^{λ_i} の長さである。

各対角型ブロックを改めて A と書けば、A はただ一つの固有値 λ をもち、$N = \lambda - A$ は、$N^m = 0$ をみたす。このような変換／行列を**冪零** (nilpotent) と呼ぶ。したがって、この場合の A は、固有値の情報の他は、冪零行列 N の様子が問題となる。これについては、次の Camille Jordan の結果がある。

次の形の $m \times m$ 行列を長さ m のジョルダン冪零行列と呼ぼう。$N(m)^{m-1} \ne 0$, $N(m)^m = 0$ に注意。

$$N(m) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \text{\huge 0} \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ \text{\huge 0} & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

定理 C.3 (Jordan form)**.** すべての冪零変換 N は、ジョルダン冪零行列による対角型ブロック表示をもつ。また、ブロック表示に現れる長さ m のジョルダン冪零行列の個数は N だけで決まる。

証明の最大のヒントは、このような表示が可能であるということ。冪零変換 N に付随した階層構造

$$\ker N \subset \ker N^2 \subset \cdots \subset \ker N^{m-1} \subset \ker N^m = V$$

で、N は各階層を一つ下の階層に移すことに注意する。

補題 C.4. ベクトル $v \in \mathbb{C}^n$ と行列 $A \in M_n(\mathbb{C})$ が、ある $r \ge 1$ に対して、$T^r v = 0$, $T^{r-1}v \ne 0$ をみたすとする。このとき、$\{v, Tv, \cdots, T^{r-1}v\}$ は一次独立である。

Proof.

$$\lambda_0 v + \lambda_1 Tv + \cdots + \lambda_{r-1}T^{r-1}v = 0$$

に、$T^{r-1}, T^{r-2}, \cdots, T$ を順次作用させると、$\lambda_0 = 0, \lambda_1 = 0, \cdots, \lambda_{r-2} = 0$ が次々得られ、最後に $\lambda_{r-1}T^{r-1}v = 0$ から、$\lambda_{r-1} = 0$ もわかる。 □

言葉を用意しておこう。ベクトル空間 V の部分空間 W に対して、V のベクトルの集まり $\{v_1,\cdots,v_l\}$ が W と独立であるとは、

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_l v_l \in W \Longrightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_l = 0$$

となること。いいかえると、$\mathbb{C}v_1 + \cdots + \mathbb{C}v_l + W$ が直和となること。このとき、$\{v_1,\cdots,v_l\}$ は通常の意味で独立であることに注意。さらに、$V = \mathbb{C}v_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}v_l \oplus W$ であるとき、(v_i) を V/W 基底と呼ぶことにする。ここで、V/W 基底 $v_1,\cdots,v_l$ に W の基底を併せたものが V の基底であることに注意。

ベクトル $\{v_1, \cdots, v_l\}$ が $\ker N^k$ と独立であれば、$\{Nv_1, \cdots, Nv_l\}$ は $\ker N^{k-1}$ と独立である。実際、$\sum_i \lambda_i N v_i \in \ker N^{k-1}$ とすると、$N^k(\sum_i \lambda_i v_i) = 0$ である。

次は何度か出てきた論法のくり返しでわかる。

補題 C.5. W と独立なベクトルの集まり $v_1, \cdots, v_k$ にベクトルを補って V/W 基底にすることができる。

さて、定理の証明のためには、一次独立なベクトルの集まり $\{v_1, \cdots, v_r\}$ で、

$$N^k v_i, k \geq 0, 1 \leq i \leq r$$

から零ベクトルを除いたものが基底となるものの存在を示せばよい。

階層の上の方から帰納的に $\{v_1, \cdots, v_r\}$ を選んでいこう。まず、$V/\ker N^{m-1}$ 基底 $v_1, \cdots, v_i$ を用意する。次に、$\{Nv_1, \cdots, Nv_i\} \subset \ker N^{m-1}$ が $\ker N^{m-2}$ と独立であることに注意して、これにベクトル $\{v_{i+1}, \cdots, v_j\} \subset \ker N^{m-1}$ を追加して、$Nv_1, \cdots, Nv_i, v_{i+1}, \cdots, v_j$ が $\ker N^{m-1}/\ker N^{m-2}$ 基底であるようにする。次に、$\{N^2v_1, \cdots, N^2v_i, Nv_{i+1}, \cdots, Nv_j\} \subset \ker N^{m-2}$ が $\ker N^{m-3}$ と独立であることに注意して、これにベクトル $\{v_{j+1}, \cdots, v_k\} \subset \ker N^{m-2}$ を追加して、$N^2v_1, \cdots, N^2v_i, Nv_{i+1}, \cdots, Nv_j, v_{j+1}, \cdots, v_k$ が $\ker N^{m-2}/\ker N^{m-3}$ 独立であるようにする。以下、これをくり返すことで、求める $\{v_1, \cdots, v_r\}$ が得られる。

付録D　長さからの内積

ベクトルに対する長さの情報だけから角度の性質を使わずに内積を引き出すことができる (Jordan-von Neumann の定理[*112])。ここで必要な長さの性質は次の通り。

(i) (正値性) $\|\boldsymbol{v}\| \geq 0$.
(ii) (三角不等式) $\|\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}\| \leq \|\boldsymbol{v}\| + \|\boldsymbol{w}\|$.
(iii) (中線定理[*113]) $\|\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}\|^2 + \|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}\|^2 = 2\|\boldsymbol{v}\|^2 + 2\|\boldsymbol{w}\|^2$.

この状況の下で、$2(\boldsymbol{v}|\boldsymbol{w}) = \|\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}\|^2 - \|\boldsymbol{v}\|^2 - \|\boldsymbol{w}\|^2$ とおけば、$(\boldsymbol{v}|\boldsymbol{w})$ がいわゆる内積の性質をみたすことが以下のようにしてわかる。

まず、中線定理で $v = w = 0$ とおけば、$\|\boldsymbol{0}\| = 0$ が分かる。次に $v = 0$ とおけば $\|-w\| = \|w\|$ が、$v = w$ とおけば $\|2v\| = 2\|v\|$ が従う。まとめると $\|\pm 2v\| = 2\|v\|$ (倍率等式) が成り立つ。一方、$\|-v\| = \|v\|$ と (i), (ii) より、$\big|\|\boldsymbol{v}\| - \|\boldsymbol{w}\|\big| \leq \|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}\|$ が出るので、とくに $\big|\|s\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}\| - \|t\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}\|\big| \leq |s-t|\,\|\boldsymbol{v}\|$ がわかり、$\|t\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}\|$ は t の連続関数である。内積の性質を導く上で必要なのは、この連続性と (i) と (iii) である。

さて、内積の性質のうち、$(\boldsymbol{v}|\boldsymbol{v}) \geq 0$ は倍率等式と (i) からわかり、$(\boldsymbol{v}|\boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{w}|\boldsymbol{v})$ は今の定義から明らかなので、分配法則の性質を次に確かめる。これは、倍率等式と中線定理を二度使って得られる等式

$$\begin{aligned}
2(\boldsymbol{u}|\boldsymbol{w}/2) + 2(\boldsymbol{v}|\boldsymbol{w}/2) &= \|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{w}/2\|^2 - \|\boldsymbol{u}\|^2 - \|\boldsymbol{w}/2\|^2 + \|\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}/2\|^2 - \|\boldsymbol{v}\|^2 - \|\boldsymbol{w}/2\|^2 \\
&= \frac{1}{2}\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}\|^2 + \frac{1}{2}\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|^2 - \|\boldsymbol{u}\|^2 - \|\boldsymbol{v}\|^2 - \frac{1}{2}\|\boldsymbol{w}\|^2 \\
&= \frac{1}{2}\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}\|^2 - \frac{1}{2}\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|^2 - \frac{1}{2}\|\boldsymbol{w}\|^2 \\
&= (\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}|\boldsymbol{w})
\end{aligned}$$

[*112] Pascual Jordan and John von Neumann, On inner products in linear, metric spaces, Ann. Math., 36(1935), 719–723.
[*113] 日本ではこうよばれるが、英語では parallelogram law (平行四辺形則) である。

で、$\boldsymbol{u}=0$ とすれば分かる $2(\boldsymbol{v}|\boldsymbol{w}/2)=(\boldsymbol{v}|\boldsymbol{w})$ を上の等式に戻すことで得られる。

最後に $(t\boldsymbol{v}|\boldsymbol{w})=t(\boldsymbol{v}|\boldsymbol{w})$ を示す。これは、両辺が t について連続であることから、t が有理数の場合に帰着させられる。一般に、有理数 t の上で値 $f(t)$ が定義された関数 f が加法性 $f(s+t)=f(s)+f(t)$ を満たせば、$f(t)=tf(1)$ が成り立つ。実際、この等式を満たす有理数全体を Q とおけば、自然数 $n\geq 1$ に対して、$f(n)=f(1+\cdots+1)=f(1)+\cdots+f(1)=nf(1)$ より $n\in Q$ である。さらに、$f(0)=f(0+0)=f(0)+f(0)$ から、$0\in Q$. $t\in Q$ ならば、$0=f(0)=f(t)+f(-t)$ より $-t\in Q$. $t\in Q$ で n を自然数とすれば、$f(t)=f(t/n+\cdots+t/n)=f(t/n)+\cdots+f(t/n)=nf(t/n)$ より、$t/n\in Q$. 以上のことから Q は有理数全体であることがわかる。

Remark 13. 条件 (i), (iii) だけでは連続性が成り立たない。実際、$\mathbb{Q}$ 上の基底 (Hamel basis) $\{e_i\}_{i\in I}$ をとってきて、

$$\|v\|^2=\sum_{i\in I}|v_i|^2,\quad v=\sum_{i\in I}v_ie_i$$

とおけば、正値性および中線定理はなりたつものの、$\|v\|^2\in\mathbb{Q}$ であることから t^2 が無理数のとき、$\|tv\|=|t|\,\|v\|$ とならない。

付録E　エルミート行列の対角化

本文では、エルミート行列のユニタリー行列による対角化を正規行列の場合に一般化して述べた。これは、ユニタリー行列の対角化も同時に示すことができるため、多くの教科書で取り上げられる方法ではあるが、最も使用頻度の高いエルミート行列／実対称行列に限定するとやや遠回りでもある。ここでは、内積の不等式を使った直接的な方法について説明しよう。

内積空間の節のあとに続けて読めるように、復習を少々。まず、内積の性質のうち、$(v|v)\Longrightarrow v=0$ 以外を満たすものを半内積 (semi-inner product) と呼ぶことにすれば、Remark 6 でも注意したように、内積の不等式は半内積に対して成り立つ。つぎに、複素数を成分とする正方行列 $A=(a_{jk})$ で $\overline{a_{jk}}=a_{kj}$ なるものをエルミート行列というのであった。エルミート行列はまた標準内積を使って、$(v|Aw)=(Av|w)$ $(v,w\in\mathbb{C}^n)$ という性質で特徴づけられる。このことから、エルミート行列 A に対しては、$(v|Av)$ は実数であることもわかる。

以下では、内積空間 $\mathbb{C}^n$ の部分空間 W に対して、その単位ベクトル全体を W_1 と書くことにする。とくに $(\mathbb{C}^n)_1$ は、$\mathbb{C}^n$ における単位ベクトル全体を表す。

示すべきは、$n\times n$ エルミート行列 A に対して、実数列 $(\alpha_j)_{1\leq j\leq n}$ と $\mathbb{C}^n$ の正規直交基底 $(e_1,\cdots,e_n)$ で、$Ae_j=\alpha_je_j$ $(j=1,\cdots,n)$ となるものが存在すること。

Proof. $(\mathbb{C}^n)_1$ の上で定義された実数値関数 $(\mathbb{C}^n)_1\ni v\mapsto(v|Av)$ の最小値[*114]を α_1 とし、単位ベクトル e_1 を $\alpha_1=(e_1|Ae_1)$ であるように選んでおく。このとき、$\langle v|v'\rangle=(v|Av')-\alpha_1(v|v')$ とおけば、$\langle\ |\ \rangle$ は半内積となり、不等式 $|\langle v|v'\rangle|^2\leq\langle v|v\rangle\,\langle v'|v'\rangle$ が成り立つ。そこで、$\langle e_1|e_1\rangle=0$ に注意すれば、

$$\langle v|e_1\rangle=0\ \forall v\in\mathbb{C}^n\iff(v|Ae_1)=\alpha_1(v|e_1)\ \forall v\in\mathbb{C}^n\iff Ae_1=\alpha_1e_1.$$

すなわち、e_1 は固有値 α_1 の固有ベクトルである。

これを出発点に、A の固有ベクトル e_j からなる正規直交系 $e_1,\cdots,e_r$ で、e_j の固有値を α_j とするとき、

$$\alpha_j=\min\bigl\{(v|Av);v\in\{e_1,\cdots,e_{j-1}\}^\perp,(v|v)=1\bigr\}\quad\text{for }j=2,\cdots,r$$

[*114] 最小値が存在することは、Bolzano の絞り出し論法による。

が成り立つものを r について帰納的に構成していこう。$1 \le r < n$ まで構成できたと仮定する。部分空間 $W = \{e_1, \cdots, e_r\}^\perp$ に対して、W_1 上の実数値関数 $W_1 \ni w \mapsto (w|Aw)$ の最小値を α_{r+1} とし、その値を実現する単位ベクトル $e_{r+1} \in W$ をひとつ取ってくる。(射影定理 13.7 により、$\dim W = n - r \ge 1$ である。)

このとき、$\langle w|w' \rangle = (w|Aw') - \alpha_{r+1}(w|w')$ は W の上の半内積となるので、内積の不等式から $(w|(Ae_{r+1} - \alpha_{r+1}e_{r+1})) = 0$ $(w \in W = \{e_1, \cdots, e_r\}^\perp)$ が成り立つ。これと

$$(e_j|(Ae_{r+1} - \alpha_{r+1}e_{r+1})) = (Ae_j|e_{r+1}) - \alpha_{r+1}(e_j|e_{r+1}) = (\alpha_j - \alpha_{r+1})(e_j|e_{r+1}) = 0 \quad (1 \le j \le r)$$

をあわせ、再び射影定理を使うと $Ae_{r+1} = \alpha_{r+1}e_{r+1}$ がわかり、帰納的構成が前に進む。 □

A が実対称行列の場合には、以上の議論をすべて実数の範囲で行うことができる。すなわち、A の固有ベクトルから成る $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底が存在する。

Remark 14. 証明を振り返って見ればわかるように、掃き出し法や行列式といった行列代数の道具は一切必要ない。エルミート行列ないし実対称行列に限定すれば、もっとも短手順でユニタリー行列あるいは直交行列による対角化を与えるものとなっている。

集合 X の上で定義された実数値関数 $f(x)$ に対して、その最大値が存在する時、最大値の値を

$$\max\{f(x); x \in X\} = \max_{x \in X} f(x)$$

のように書く。同様に、最小値が存在するとき、その最小値を min という記号で表す。

定理 E.1 (mini-max principle)**.** エルミート行列 A の固有値を小さい順に $\alpha_1 \le \alpha_2 \le \cdots \le \alpha_n$ と並べておく。このとき、

$$\alpha_k = \min_{\dim W = k} \max\{(w|Aw); w \in W, (w|w) = 1\}.$$

Proof. 正規直交基底 $(e_1, \cdots, e_n)$ を $Ae_j = \alpha_j e_j$ であるように取っておく。$W \cap \langle e_k, e_{k+1}, \cdots, e_n \rangle = \{0\}$ であれば、$\dim(W + \langle e_k, \cdots, e_n \rangle) = k + (n - k + 1) = n + 1$ となって、$\dim \mathbb{C}^n = n$ に反するので、$W \cap \langle e_k, e_{k+1}, \cdots, e_n \rangle \ne \{0\}$. そこで、単位ベクトル $u = \lambda_k e_k + \cdots + \lambda_n e_n \in W$ が存在し、

$$\max\{(w|Aw); w \in W, (w|w) = 1\} \ge (u|Au) = \sum_{j=k}^{n} \alpha_j |\lambda_j|^2 \ge \alpha_k \sum |\lambda_j|^2 = \alpha_k$$

がわかる。

一方、$W = \langle e_1, \cdots, e_k \rangle$ とすれば、単位ベクトル $e_k \in W$ において、$(e_k|Ae_k) = \alpha_k$ が実現されるので、逆向きの不等式も成り立つ。 □

付録F　二次形式の符号

実変数 $x_1, \ldots, x_n$ の二次同次式

$$Q(x) = Q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{1 \le i,j \le n} a_{ij} x_i x_j, \quad a_{ij} = a_{ji} \in \mathbb{R}$$

を $x_1, \ldots, x_n$ の**実二次形式** (real quadratic form) というのであった。二次形式 $Q(x)$ は、対称行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

を使って、

$$Q(x) = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

と表示されるので、これを $Q_A(x)$ と書くことにする。逆をもつ行列 $T = (t_{ij})$ を使って、変数 $x_1, \dots, x_n$ に

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & \dots & t_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

という変数変換を施せば、$Q_A(x) = Q_B(y)$, $B = {}^tTAT$ となる。

定理 F.1 (Lagrange-Sylvester)**.** 任意の実対称行列 A に対して、逆をもつ行列 T で、${}^tTAT$ が対角行列になるものが存在する。

また、このようにして得られた対角行列の対角成分に現れる、正数の個数、負数の個数、零の個数は、それぞれ、A の正固有値の個数、負固有値の個数、零固有値の個数に一致する。但し、固有値の個数は重複度も込めて数える。

Proof. 行列 A のサイズに関する帰納法による。対称行列 A の対角成分に零でないものが現れる、例えば、$a_{11} \neq 0$、とすると、

$$\begin{aligned} Q(x) &= a_{11}x_1^2 + 2x_{11}(b_2x_2 + \dots + b_nx_n) + R(x_2, \dots, x_n) \\ &= \frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1 + b_2x_2 + \dots + b_nx_n)^2 + R(x_2, \dots, x_n) - \frac{1}{a_{11}}(b_2x_2 + \dots + b_nx_n)^2 \end{aligned}$$

となって、変数変換

$$y_1 = a_{11}x_1 + b_2x_2 + \dots + b_nx_n, \quad y_j = x_j \ (2 \leq j \leq n)$$

を施せば、

$$Q(x) = \frac{y_1^2}{a_{11}} + R(y_2, \dots, y_n) - \frac{1}{a_{11}}(b_2y_2 + \dots + b_ny_n)^2$$

となって、帰納法が機能する。

全ての対角成分が消えていてなおかつ $A \neq 0$ であるときには、$a_{ij} \neq 0$ となる $i \neq j$ が存在する、例えば $a_{12} \neq 0$ である、ときには、

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

なる変数変換を施せば、

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

となるので、対角成分に零でないものが含まれる場合に帰着する。

次に、「符号数」が変化しないことを見るために、逆をもつ行列 T, T' に対して、

$${}^tTDT = A = {}^tT'D'T', \quad D = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix}, D' = \begin{pmatrix} d'_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d'_n \end{pmatrix},$$

$d_1 > 0, \dots, d_l > 0, d_{l+1} < 0, \dots, d_{l+m} < 0, d_{l+m+1} = \dots = d_n = 0$ などであったとする。ここで、$l < l'$ と仮定して矛盾を導こう。連立一次方程式

$$\begin{pmatrix} t_{11} & \dots & t_{1n} \\ & \vdots & \\ t_{l1} & \dots & t_{ln} \\ t'_{l'+1,1} & \dots & t'_{l'+1,n} \\ & \vdots & \\ t'_{n1} & \dots & t'_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

を考える。$l + (n - l') < n$ であるから、自明でない解 x が存在する。$y = Tx, y' = T'x$ とおく。

一方、作り方から $Q(x) = {}^t y D y \leq 0$ かつ $Q(x) = {}^t y' D' y' \geq 0$ で、

$$y' = \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_{l'} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

であるから

$$Q(x) = d'_1(y'_1)^2 + \dots + d'_{l'}(y'_{l'})^2 = 0$$

となって、$y'_1 = \dots = y'_{l'} = 0$ となる。すなわち、$T'x = y' = 0$ となって、これは $x \neq 0$ に反する。

以上により、$l = l'$ であることがわかる。同様にして、$m = m'$ も導かれる。 □

付録G　商空間と双対空間とテンソル積と

内積の不等式と商空間、不定積分と商空間、定積分と商空間。

双対空間、双対写像、双対性。

テンソル積の機能的定義、基底とテンソル積の存在、多重線型形式とテンソル積。

テンソル代数、対称代数、外積代数。