未知数 x を定数とみて第2、3式を y, z について解くと

$$\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} t_2 - a_2 x & c_2 \\ t_3 - a_3 x & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t_2 & c_2 \\ t_3 & c_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} x, \tag{4}$$

$$\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} z = \begin{vmatrix} b_2 & t_2 - a_2 x \\ b_3 & t_3 - a_3 x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_2 & t_2 \\ b_3 & t_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b_2 & a_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix} x. \tag{5}$$

そこで、(1) 式を $\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ 倍したものに (4), (5) 式を代入すると、

$$\left(a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \right) x = t_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} t_2 & c_2 \\ t_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} t_2 & b_2 \\ t_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

この両辺には同じ形の式が現れるので、**3次行列式**を

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

で定義する。(1行目に関する展開。) そうすると、上で求めた連立方程式の解の公式は、

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} t_1 & b_1 & c_1 \\ t_2 & b_2 & c_2 \\ t_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

のようになる。

2次行列式の性質から、3次行列式の性質がわかる。

(i) 線型性:行列式 $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ は、各ベクトルについて分配法則が成り立つ。

(ii) 交代性:$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ のうち2つのベクトルを入れ替えると行列式の値にマイナス符号がつく。

(iii) 規格化条件:

$$\det(I_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

問 4.2. 未知数 y, z を 3 次行列式で表す公式を導け。

5 一般の行列式

n 次行列式を $n-1$ 次行列式に還元する形で、

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{1j} \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & [a_{2j}] & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & [a_{nj}] & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

と帰納的に定義する。ただし、$[a_{2j}], \ldots, [a_{nj}]$ とあるのはそこの部分の削除を意味する。(1行に関する展開。)

行列式のサイズに関する帰納法で(2次行列式の性質から3次行列式の性質を導いたのと同じ方法で)、次の性質を確かめることができる。

(i) 線型性：行列式 $\det(\overrightarrow{a_1}, \cdots, \overrightarrow{a_n})$ は、各ベクトルについて分配法則が成り立つ。

(ii) 交代性：$\overrightarrow{a_1}, \cdots, \overrightarrow{a_n}$ のうちの 2 つのベクトルを入れ替えると行列式の値は符号が反対になる。

(iii) 規格化条件：

$$\det(I_n) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

たとえば、$\overrightarrow{a_k}$ と $\overrightarrow{a_l}$ $(k < l)$ の入れ換えについての交代性を示すのであれば、展開式（定義式）の和の部分を

$$\sum_{j \neq k, j \neq l} (-1)^{j+1} a_{1j} \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & [a_{2j}] & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & [a_{nj}] & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{k+1} a_{1k} \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & [a_{2k}] & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & [a_{nk}] & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + (-1)^{l+1} a_{1l} \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & [a_{2l}] & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & [a_{nl}] & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

といった分け方にして帰納法の仮定を使う。あるいは、線型性を確かめたあとで、2 つの列を等しいとした場合に値が 0 になることを示す。これは次の仕組みに基づく。

n 次列ベクトル $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ を変数とする関数 $f(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$ が $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ それぞれについて線型性（分配法則）をみたせば、$f(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}) = -f(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$ がすべての $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ について成り立つこと（交代性）と $f(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a}) = 0$ がすべての $\overrightarrow{a}$ について成り立つことは同値。実際、交代性で $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{c}$ とおけば、$f(\overrightarrow{c}, \overrightarrow{c}) = 0$ であり、逆にこれがすべての $\overrightarrow{c}$ で成り立てば、次の等式から交代性が従う。

$$0 = f(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}, \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = f(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a}) + f(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) + f(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}) + f(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{b}) = f(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) + f(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}).$$

問 5.1. $n = 4$ のときに上の 3 つの性質を確かめよ。

問 5.2. ($\sharp$) 連立一次方程式 $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{t}$ の解 $x_1, \ldots, x_n$ は $|A|x_j = \det(\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{t}, \ldots, \overrightarrow{a_n})$ をみたす[*29]。これ を行列式の性質（列に関する線型性と交代性）から導け。

$m \times n$ 行列 $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ の**転置行列**[*30](transposed matrix) ${}^tA$ を ${}^tA = (a_{ji})$ で定める。

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad {}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

転置は二度繰り返すと、${}^t({}^tA) = A$ のように元の行列に戻り、列ベクトルの転置は行ベクトル、行ベクトルの転置は列ベクトルであることに注意。

例 5.1. 積の転置について、${}^t(AB) = ({}^tB)({}^tA)$ が成り立つ (積の順番に注意)。

実際、$AB = C = (c_{ik})$ とし、転置行列の成分を ${}^tc_{ki}$ のように書けば、${}^tc_{ki} = c_{ik}$ などとなるので、

$${}^tc_{ki} = c_{ik} = \sum_j a_{ij} b_{jk} = \sum_j {}^tb_{kj} \, {}^ta_{ji}$$

[*29] クラメルの公式 (Cramèr's rule) と呼ばれ有名であるが、重要度は低い。他にも Cayley-Hamilton の定理というのがその類か。

[*30] 転置行列を表す記号としては A^T のような書き方もあるが、これだと行列 A の T 乗と紛らわしい、かな。

より、${}^tC = {}^tB\,{}^tA$ であることがわかる。

行列式の性質として基本的なものが次の定理である。(証明については、節を改めて述べる。)

定理 5.2.

(i) 線型性・交代性は行ベクトルについても成り立つ。
(ii) 行に関する展開式、列に関する展開式が成り立つ。展開式の符号は chess board rule による。
(iii) 転置行列の行列式は元の行列式に等しい。
(iv) A, B を n 次の正方行列とするとき、$\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

系 5.3.

(i) 行列式の中に同じ行または列があれば、行列式の値は 0。
(ii) ある行 (列) の定数倍を他の行 (列) に加えても行列式の値は変化しない。

行列式の具体的な計算においては、行あるいは列に関する展開を行う前に、上の系 (ii) の性質を利用して、特定の行あるいは列にできるだけ多くの 0 成分を含むように加工するとよい。連立一次方程式を解く際の消去法に似ていることに注意。

例 5.4. 4行4列の計算例。途中経過を変えることで検算にも利用する。

例 5.5. **三角行列** (triangular matrix) の行列式。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}.$$

問 5.3. $|tA| = t^n|A|$ を示せ[*31]。

問 5.4. ($\sharp$) 座標平面内の3点 (a_i, b_i) $(i = 1, 2, 3)$ が同一直線上にないとき、この3点を通る円の方程式は

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ a_1^2+b_1^2 & a_1 & b_1 & 1 \\ a_2^2+b_2^2 & a_2 & b_2 & 1 \\ a_3^2+b_3^2 & a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

問 5.5 (*). Vandermonde 行列式の計算。右辺の鳥居のような記号 (π の大文字) は、積をとる操作を表す。

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (\lambda_j - \lambda_i).$$

[*31] そそっかしい人は、$|tA| = |t|\,|A|$ などとやらかす。その点、$\det(tA)$ だとさすがに慎重になれるかな。