を小行列の形にまとめると、$C_{i,k} = \sum_{j=1}^{m} A_{i,j} B_{j,k}$ を得る。これだけのことではあるが、行列の本質は配列の場所でも場所を表す数字でもないということ。それが分かったかどうかの試金石というと大げさか。

4　２次・３次の行列式

２元連立１次方程式
$$\begin{cases} ax + by = s \\ cx + dy = t \end{cases} \iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$$
を x, y について解けば
$$x = \frac{sd - tb}{ad - bc}, \quad y = \frac{at - cs}{ad - bc}.$$

問 4.1. この表示式を導け。

この分母に共通して現れる式 $ad - bc$ を行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の**行列式** (determinant*[27]) といい、
$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$
などと書く*[28]。この記号を使えば、上で与えた解の公式は
$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} s & b \\ t & d \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} a & s \\ c & t \end{vmatrix}$$
のようになる。

行列 A を縦割にして $A = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ と書こう。

(i) **線型性** (linearity)：各ベクトルに対して、次のような分配法則が成り立つ。
$$\det(\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}) = \alpha\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) + \beta\det(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}).$$

(ii) **交代性** (alternating property)：
$$\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = -\det(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}).$$

(iii) **規格化条件** (normalization condition)：
$$\det(I_2) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

一般化
$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = t_1 \tag{1}$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = t_2 \tag{2}$$
$$a_3 x + b_3 y + c_3 z = t_3 \tag{3}$$

*27 意味は「決定式」。言い方は似ているが、行列とは別物であることに注意せよ。ついでながら、行列式を縦棒で表すのが慣例ではあるが、絶対値記号との相性はよくない。１行１列の行列が数そのものとは区別されるべきことを知る上では良いが。

*28 「２次行列式は、たすき掛け」と唱えるものだが、たすき掛けを知らぬ世代には何と説く。

未知数 x を定数とみて第２、３式を y, z について解くと

$$\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} t_2 - a_2 x & c_2 \\ t_3 - a_3 x & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t_2 & c_2 \\ t_3 & c_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} x, \tag{4}$$

$$\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} z = \begin{vmatrix} b_2 & t_2 - a_2 x \\ b_3 & t_3 - a_3 x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_2 & t_2 \\ b_3 & t_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b_2 & a_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix} x. \tag{5}$$

そこで、(1) 式を $\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ 倍したものに (4), (5) 式を代入すると、

$$\left(a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \right) x = t_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} t_2 & c_2 \\ t_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} t_2 & b_2 \\ t_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

この両辺には同じ形の式が現れるので、**３次行列式**を

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

で定義する。(１行目に関する展開。) そうすると、上で求めた連立方程式の解の公式は、

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} t_1 & b_1 & c_1 \\ t_2 & b_2 & c_2 \\ t_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

のようになる。

２次行列式の性質から、３次行列式の性質がわかる。

(i) 線型性：行列式 $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ は、各ベクトルについて分配法則が成り立つ。

(ii) 交代性：$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ のうち２つのベクトルを入れ替えると行列式の値にマイナス符号がつく。

(iii) 規格化条件：

$$\det(I_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

問 4.2. 未知数 y, z を 3 次行列式で表す公式を導け。

5　一般の行列式

n 次行列式を $n-1$ 次行列式に還元する形で、

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{1j} \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & [a_{2j}] & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & [a_{nj}] & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

と帰納的に定義する。ただし、$[a_{2j}], \ldots, [a_{nj}]$ とあるのはそこの部分の削除を意味する。(１行に関する展開。)

行列式のサイズに関する帰納法で（２次行列式の性質から３次行列式の性質を導いたのと同じ方法で)、次の性質を確かめることができる。