数の集合

自然数 (natural number)、実数 (real number)、複素数 (complex number) 全体の集合をそれぞれ、

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}, \quad \mathbb{R}, \quad \mathbb{C}$$

という記号で表す。以下、単に数といった場合には、このいずれかを指すものとしよう。また数というかわりに**スカラー** [*3](scalar) という言い方もする。

1 行列事始め

「行列の掛け算というのは、代入のことなんだ」— Arthur Cayley

これから深く付き合うことになる行列 (matrix[*4]) について、その出処などを見ておくのも悪くはなかろう。形式的には、数の 1 次元配列が数列（あるいはベクトル）であるのに対して、数の 2 次元配列が行列に他ならず、色々こじつけする向きもあるが、連立一次方程式、これに尽きる。

未知数が多い連立一次方程式を解けばすぐ実感することであるが、未知数を表す文字というのは本質的な役目はせず、大事なのはその係数のやりくりである。ということで、係数だけを抜き出して計算してもよいわけで、よほどの変わり者でないかぎり、係数を縦横に並べた形式を採用することになる。例えば、

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned}$$

から 2 次元配列を作るとなると

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{matrix} \quad \text{または} \quad \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{matrix}$$

であろう。一見、後者が自然に見えるかも知れないが、a, b, c が関係する部分と d が関係する部分は異質なので、

$$\begin{array}{ccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{array}$$

[*3] 物理では、スカラーを座標変換と関連させて、単なる数以上の意味で使う。

[*4] 日本語は即物的ながら、ラテン語の子宮に由来する言葉。マトリックスではなく、maytrics のように発音する点にも注意。

といった書き方もあり得るだろう。先程は未知数の文字はどうでもよいと言ったが、そうは言っても係数と未知数の対応関係もわかるような目印をつけておくのも悪くはない。目印の付け方として自然に思えるのは、

$$\begin{array}{ccc} x & y & z \\ \hline a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{array}$$

であろうか。このように、２次元配列といっても諸々の綾があり、十人十色、様々な表記法が考えられるところである。このような任意性のある部分を初めから決めてかかるのは、往々にして後々齟齬をきたすので、ここでは、そういったことに左右されないであろう本体の部分

$$\begin{array}{ccc} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_2 & c_3 \end{array}$$

にまず注目し、これをいろいろ調べ、しかる後にそれ以外の部分を定めるとしよう。

さて、こういった２次元配列であるが、その塊の範囲を明確にするために適宜括弧でくくることにする。多く使われる括弧は丸括弧と角括弧であるが、波括弧だろうがなんだろうが構わない。紛れのないときは、上のように括弧をつけなくてもよい、というか括弧をつけないのが本来の様式である。丸が良いとか角に限るとかいろいろ言う人もいるようであるが、どうでもよいことなので好きなように。

注意ついでに、特別な場合として２種類の一次元配列があることを認識しておこう。横配列と縦配列である。これが行列の行と列に相当し[*5]、英語では row と column を当てる[*6]。

$$\text{row} = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}, \qquad \text{column} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}.$$

横配列の方は、個々の数の間の隙間が十分でないと数の積と混乱するので、区切り記号としてカンマを入れて (a, b, c) のようにも書く。この横配列は、高校以来慣れ親しんできた（？）ベクトルの成分表示と同じ形をしている。ということもあり、一般に行列に含まれる個々の数を行列の**成分**と呼ぶ。成分の場所を指定したかったら、２行３列成分[*7]のように言えばよい。また、縦横のサイズにこだわらず成分の個数がいくつであっても、これらを行ベクトル (row vector) 列ベクトル (column vector) と呼ぶ習慣である。

せっかく数を並べたので、それを対象に代数計算を行ってみよう。といっても簡単なことで、行列の加減は、その縦横のサイズが等しい場合にのみ、各成分ごとに行う。ベクトルのときの類似で、数を行列に掛けるという操作を、すべての成分に同じ数を掛けることと定める。２次元配列ではあるがやっていることは一次元配列の場合に相当するベクトルの成分計算と寸分違わない。

行列の和と定数倍を定めたところで、次は積である。これもできれば、通常の計算規則をできるだけ温存しておきたい。もっとも安直な成分ごとの積[*8]は、割算以外のすべてを満たすので、それだけを見れば申し分ないようにも思えるが、行列の２次元配列が生かされていないので、行列の積としては適切ではない。適切な積のヒントは、実は連立一次方程式の解き方に隠されている。

[*5] 行も列も縦横と結びついたものではないので、どちらがどちらか混乱しませんか。行列でなく縦横あるいは横縦でよかったのであるが、偉い人が決めたのだとか。漢字は行列のほうが簡単でよいか。わからなくなったら、縦列駐車と唱える。

[*6] 本来の row は縦横関係なく「列」を表す言葉であるが、column (円柱) は確かに縦であるなあ。

[*7] 縦横だと、この言い方に難があるか。やはり偉い人は良く考えてつけたのでしょう。

[*8] 何と、アダマール積 (Hadamard product) という名前がついている。

連立一次方程式を解く際の手法として、代入法と消去法があった。代入法は素朴ながら計算効率が悪いので、多くの場合は消去法に頼ることになるのであるが、この代入法の究極の一般化である変数変換の方法が行列の積を考える上での重要な手がかりとなる、というよりも行列の積そのものを与えてくれる。たとえば、先の一次式系に

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 s + \alpha_2 t \\ y &= \beta_1 s + \beta_2 t \\ z &= \gamma_1 s + \gamma_2 t \end{aligned}$$

を代入すると s, t についての一次式系

$$\begin{aligned} &(a_1\alpha_1 + b_1\beta_1 + c_1\gamma_1)s + (a_1\alpha_2 + b_1\beta_2 + c_1\gamma_2)t \\ &(a_2\alpha_1 + b_2\beta_1 + c_2\gamma_1)s + (a_2\alpha_2 + b_2\beta_2 + c_2\gamma_2)t \\ &(a_3\alpha_1 + b_3\beta_1 + c_3\gamma_1)s + (a_3\alpha_2 + b_3\beta_2 + c_3\gamma_2)t \end{aligned}$$

を得るので、これから作られる行列を、代入する前の 2 つの行列の積と同定すると、

$$\begin{pmatrix} a_1\alpha_1 + b_1\beta_1 + c_1\gamma_1 & a_1\alpha_2 + b_1\beta_2 + c_1\gamma_2 \\ a_2\alpha_1 + b_2\beta_1 + c_2\gamma_1 & a_2\alpha_2 + b_2\beta_2 + c_2\gamma_2 \\ a_3\alpha_1 + b_3\beta_1 + c_3\gamma_1 & a_3\alpha_2 + b_3\beta_2 + c_3\gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_2 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{pmatrix}.$$

代入の入れ子については結合法則が成り立つので、こうして定めた積も結合法則をみたす。また分配法則もなりたつ。上の計算規則は一見複雑そうであるが、代入の基本形として、$ax+by+cz$ に $x = \alpha t, y = \beta t, z = \gamma t$ を代入した場合を書いてみると、$(a\alpha + b\beta + c\gamma)t$ となるので、

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

のような計算の可能な組合せについてのくり返しになっている。ということで、最初の連立一次方程式にもどると、未知数を置く場所も定まり、次の表記にたどりつく。

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_2 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}.$$

何と Arthur Cayley のあみ出した行列代数を再発見してしまった。あとは、これを色々いじって遊ぶだけである。決して何の役に立つかを気にしてはいけない。遊ぶに足るものであるかどうかの問いかけだけは忘れずに。

2 直線と平面の幾何学

「ベクトルというのは、平行移動のことなんだ」— Hermann Weyl

高校では、有向線分の同値類として（幾何）ベクトルを学んだ。これはこれで良いのであるが、ベクトルを移動量と考えることでより多くのことが見えてくる。移動量としてのベクトルは特定の点と無関係に考えられるべきもので、例えば、一定の向きと速さで流れる風は、場所と独立したベクトルと見ることができる。ただし、始点 P と終点 Q の 2 点が指定されると、点 P から点 Q への移動量としてベクトル[*9](変位ベクトル,

[*9] ベクトルであることを強調して、$\overrightarrow{v}$ とか $\boldsymbol{v}$ のように書いたりするが、面倒なときは、普通の文字でベクトルを表すこともある。以下では、矢印と太文字の両方を特にこだわりなく使用する。