

4. 応力の概念と保存法則

この章では、物体を第1章で定義した連続体として扱い、その内部の力学的状態をどのように表現するかについて述べる。物体に外力が作用すると物体は変形し、それに伴って物体内部には力が発生する。その力を表現するために、まず関心のある点を通る平面で物体を仮想的に切断し、その面を介して両側の物体の間に働く内力の概念を導入する。そして単位面積当たりの内力として応力ベクトルを定義し、それが選んだ点の位置だけでなく切断する面の向きにも依存すること、より具体的には応力ベクトルは面に垂直な単位法線ベクトルを線形変換することによって得られることを示す。その線形変換が応力テンソルであり、物体内部の力学的状態を完全に表現する。力学の基本法則である運動量保存の法則および角運動量の保存の法則を連続体に適用し、応力テンソルに関する支配方程式、すなわち応力テンソルで表現した運動方程式と応力テンソルの対称性を導く。つづいて主応力や主方向などの応力テンソルの性質について述べる。静的平衡にある場合の運動方程式、すなわち平衡方程式の代わりとなる仮想仕事の原理について述べるとともに、仕事率に関して共役の概念を用いて有限変形理論において用いられる各種の応力テンソルを導く。最後に、固体力学における熱力学第1法則と第2法則を表現する基礎方程式を導く。

4.1. 応力ベクトル

基準配置 B_0 にあった物体が、時刻 t において現在配置 B_t を占めるものとする。物体 B_t の内部に任意の点 x をとり、その点を通る仮想的な平面によって物体 B_t を2つに切断する（図4-1参照）。切断面に単位法線ベクトル n を立て、 n が指し示す側の物体を正の側の物体 B_t^+ 、反対側の物体を負の側の物体 B_t^- ということにする。

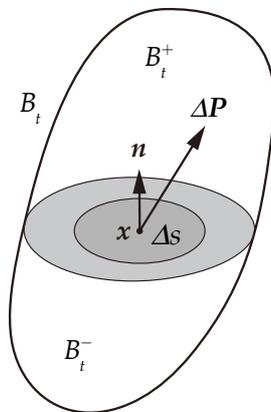


図4-1 物体内の任意の点 x を通る切断面とその上の微小面素 Δs に生じる内力 ΔP

切断平面上で点 \boldsymbol{x} を含むように微小面積 Δs をとり、 Δs を介して物体 B_t^+ が物体 B_t^- に及ぼす力（物体内部に生じる力であるので、以下では**内力**（internal force）と呼ぶことにする）をベクトル $\Delta \boldsymbol{P}$ で表す。内力 $\Delta \boldsymbol{P}$ は点 \boldsymbol{x} の位置と切断面に対する法線ベクトル \boldsymbol{n} 、並びに面積 Δs に依存する。このとき、比 $\Delta \boldsymbol{P} / \Delta s$ を考え、切断面、すなわち \boldsymbol{n} の方向を維持したまま $\Delta s \rightarrow 0$ としたときの比の極限値を**応力ベクトル**（stress vector）あるいは**表面力**（traction）と呼び、点の位置と法線方向への依存性を強調して $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n})$ と表記する。第1章で述べたように、ここで考える物体は連続体であるから、極限値は必ず存在する。したがって、

$$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n}) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \boldsymbol{P}}{\Delta s} \quad (4.1)$$

と書ける。応力ベクトル $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n})$ は、正の側の物体 B_t^+ が負の側の物体 B_t^- に及ぼす単位面積当たりの力である。したがって、負の側の物体 B_t^- が正の側の物体 B_t^+ に及ぼす応力ベクトル、すなわち $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{x}, -\boldsymbol{n})$ は、面を介して働く力が $-\Delta \boldsymbol{P}$ となるので、定義(4.1)により

$$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{x}, -\boldsymbol{n}) = -\boldsymbol{t}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n}) \quad (4.2)$$

となることに注意する。

さて、点 \boldsymbol{x} における力学的状態を完全に把握するには、点 \boldsymbol{x} におけるすべての応力ベクトルを明らかにすればよい。しかし、応力ベクトルは切断面の法線ベクトルによって変化し、その法線ベクトルの選び方には無限の選択肢がある。そのすべての方向の応力ベクトルを明らかにしなければならないのか。それは可能か。その答えを与えるのが応力テンソルである。次にそれについて述べよう。

4.2. 応力テンソル

応力ベクトルの法線方向への依存性を明らかにするため、現在配置において、注目する点 \boldsymbol{x} に点 O' を設定し、 O' を通り、直交デカルト座標系 $O-x_1x_2x_3$ に平行な座標線を設定する（図4-2参照）。点 O' と座標線上の点 A, B, C を頂点とする微小四面体 $O'ABC$ に作用する力の釣り合いを考えよう。微小四面体を構成する三角形 $\Delta O'BC$ 、 $\Delta O'AC$ 、 $\Delta O'AB$ は、それぞれ、座標軸の負の向きの外向き単位法線ベクトル $-\boldsymbol{e}_1, -\boldsymbol{e}_2, -\boldsymbol{e}_3$ をもち、三角形 ΔABC は外向き単位法線ベクトル \boldsymbol{n} を持つものとする。三角形 $\Delta O'BC$ 、 $\Delta O'AC$ 、 $\Delta O'AB$ の面積を、それぞれ $\Delta s_1, \Delta s_2, \Delta s_3$ とし、三角形 ΔABC の面積を Δs とする。このとき、 \boldsymbol{n} の成分を $n_i (i=1, 2, 3)$ とすれば、それらの間には次の関係が存在する。

$$\Delta s_i = n_i \Delta s \quad (i=1, 2, 3) \quad (4.3)$$

この四面体の体積 Δv は、頂点 O' から ΔABC への垂線の長さを h とすれば、

$$\Delta v = (h/3)\Delta s \quad (4.4)$$

と表現できる.

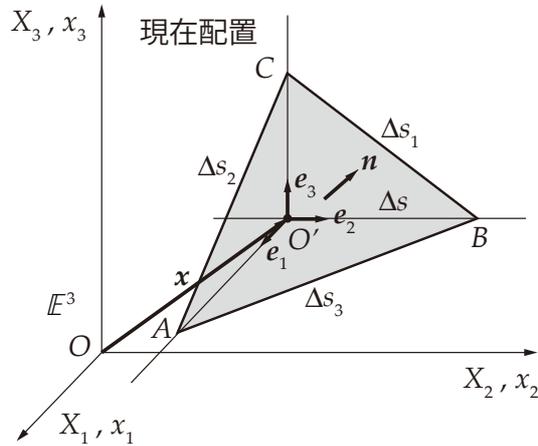


図 4-2 微小四面体における面間の幾何学的関係

この四面体に作用する力を考える. まず, 表面を介して作用する**表面力** (surface force) を考える. 四面体に作用する力は, 厳密に言えば, 四面体の中の位置によって異なるが, 点 O' の値との違いは微小量であり, 以下の議論には影響を与えない. したがってその違いを無視し, 点 O' の値を用いることにする. まず三角形 $\Delta O'BC$ に作用する力を考える. この面に対する外向き単位法線ベクトルが $-e_1$ であり, 位置に対する依存性を省略して表記すれば, 単位面積当たりの力は, 式(4.1)により $t(-e_1)$ と書ける. 三角形 $\Delta O'BC$ の面積は Δs_1 であるから, 面に作用する力は $t(-e_1)\Delta s_1$ となる. 同様に, 三角形 $\Delta O'AC$ と $\Delta O'AB$ に作用する力は, それぞれ, $t(-e_2)\Delta s_2$, $t(-e_3)\Delta s_3$ となる. 他方, 三角形 ΔABC に作用する力は $t(n)\Delta s$ とかける. 以上が四面体の4つの面を通して作用する表面力であるが, 四面体にはこの他, 重力や電磁気力のように, 物体内の体積要素あるいは質量に直接作用する**遠距離力**あるいは**物体力** (body force) が作用する. 単位質量当たりの物体力を b で表せば, 四面体へは $\rho b \Delta v$ の力が作用する. ここで ρ は質量密度である. また物体が加速度運動をしている場合には, よく知られたダランベールの原理に基づき, 慣性力が作用しているとしてその影響を考慮することができる. 加速度ベクトルを a で表せば, 四面体に作用する慣性力は $-\rho a \Delta v$ と書ける. これらの力は釣り合っているので, 次の関係式を得ることができる.

$$t(-e_1)\Delta s_1 + t(-e_2)\Delta s_2 + t(-e_3)\Delta s_3 + t(n)\Delta s + \rho b \Delta v - \rho a \Delta v = 0$$

式(4.2), 式(4.3), 式(4.4)を考慮し, 共通の因子 Δs で割ると

$$-t(e_1)n_1 - t(e_2)n_2 - t(e_3)n_3 + t(n) + (h/3)\rho b - (h/3)\rho a = 0$$

となる。ここで $\triangle ABC$ に対する単位法線ベクトル \mathbf{n} を維持したまま $h \rightarrow 0$ の極限操作をすると、物体力および慣性力の項は消失する。その結果、次式を得る。

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}) = t(e_1)n_1 + t(e_2)n_2 + t(e_3)n_3 \quad (4.5)$$

これは大変重要な結果であり、任意の単位法線ベクトル \mathbf{n} を持つ面に作用する応力ベクトル $\mathbf{t}(\mathbf{n})$ が、 e_1, e_2, e_3 を単位法線ベクトルに持つ応力ベクトルだけで表現できることを示している。すなわち、力学的状態を表現するために、あらゆる \mathbf{n} に対する応力ベクトルを求める必要はない。

式(4.5)をさらに簡潔に表現するため、式中の応力ベクトルを次のように成分表示する。

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(\mathbf{n}) &= t_1^{(n)}\mathbf{e}_1 + t_2^{(n)}\mathbf{e}_2 + t_3^{(n)}\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{t}(e_1) &= t_1^{(1)}\mathbf{e}_1 + t_2^{(1)}\mathbf{e}_2 + t_3^{(1)}\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{t}(e_2) &= t_1^{(2)}\mathbf{e}_1 + t_2^{(2)}\mathbf{e}_2 + t_3^{(2)}\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{t}(e_3) &= t_1^{(3)}\mathbf{e}_1 + t_2^{(3)}\mathbf{e}_2 + t_3^{(3)}\mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

すなわち、面を指示する単位法線ベクトルを応力ベクトル成分の括弧付きの上指標で、応力ベクトルの成分の方向を下指標で表す。これらの式を式(4.5)に代入すると

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(\mathbf{n}) &= t_1^{(n)}\mathbf{e}_1 + t_2^{(n)}\mathbf{e}_2 + t_3^{(n)}\mathbf{e}_3 \\ &= \left(t_1^{(1)}\mathbf{e}_1 + t_2^{(1)}\mathbf{e}_2 + t_3^{(1)}\mathbf{e}_3 \right) n_1 + \left(t_1^{(2)}\mathbf{e}_1 + t_2^{(2)}\mathbf{e}_2 + t_3^{(2)}\mathbf{e}_3 \right) n_2 + \left(t_1^{(3)}\mathbf{e}_1 + t_2^{(3)}\mathbf{e}_2 + t_3^{(3)}\mathbf{e}_3 \right) n_3 \\ &= \left(t_1^{(1)}n_1 + t_2^{(2)}n_2 + t_3^{(3)}n_3 \right) \mathbf{e}_1 + \left(t_1^{(2)}n_1 + t_2^{(2)}n_2 + t_3^{(3)}n_3 \right) \mathbf{e}_2 + \left(t_1^{(3)}n_1 + t_2^{(2)}n_2 + t_3^{(3)}n_3 \right) \mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

となる。成分 $t_i^{(j)}$ ($i, j = 1, 2, 3$)を σ_{ij} とおき、行列の形に整理すると、次式を得る。

$$\begin{Bmatrix} t_1^{(n)} \\ t_2^{(n)} \\ t_3^{(n)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} t_1^{(1)}n_1 + t_2^{(2)}n_2 + t_3^{(3)}n_3 \\ t_1^{(2)}n_1 + t_2^{(2)}n_2 + t_3^{(3)}n_3 \\ t_1^{(3)}n_1 + t_2^{(2)}n_2 + t_3^{(3)}n_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 + \sigma_{13}n_3 \\ \sigma_{21}n_1 + \sigma_{22}n_2 + \sigma_{23}n_3 \\ \sigma_{31}n_1 + \sigma_{32}n_2 + \sigma_{33}n_3 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix}$$

あるいは指標表示すれば

$$t_i^{(n)} = \sigma_{ij}n_j \quad (4.6)$$

と書ける。この式は単位法線ベクトル \mathbf{n} を応力ベクトル $\mathbf{t}(\mathbf{n})$ へ線形変換する式と考えることが

できる。ベクトルは座標系に依存しない存在であるから、それを変換する σ_{ij} は、同じく座標系

に依存しない線形変換

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad (4.7)$$

の成分である。ここで $\boldsymbol{\sigma}$ が作用する法線ベクトル \boldsymbol{n} とその結果である応力ベクトル $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{n})$ は、ともに現在配置を参照するベクトルであるから、 $\boldsymbol{\sigma}$ も現在配置を参照する物理量となる。式(4.6)を直接表示すれば

$$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{n} \quad (4.8)$$

となる。実際、式(4.8)を指標表示すれば

$$t_i^{(n)} \boldsymbol{e}_i = (\sigma_{ij} \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j)(n_k \boldsymbol{e}_k) = \sigma_{ij} n_k \delta_{jk} \boldsymbol{e}_i = \sigma_{ij} n_j \boldsymbol{e}_i$$

であり、指標表示式が式(4.6)に一致することを確かめることができる。2階のテンソル $\boldsymbol{\sigma}$ はコーシーの応力テンソル (Cauchy stress tensor) あるいは真応力テンソル (true stress tensor) と呼ばれ、また重要な公式(4.8)はコーシーの公式 (Cauchy's formula) あるいはコーシーの基本定理 (Cauchy's fundamental theorem) と呼ばれる。すでに述べたように、コーシーの応力テンソルは現在配置を参照する量である。

コーシーの応力テンソルの成分 σ_{ij} の物理的意味を考えよう。その答えは、コーシーの公式の適用により明らかになる。まず、現在配置 B_t における物質点の位置を表現するため、直交デカルト座標系 $O-x_1, x_2, x_3$ を設定し、その座標軸に沿う正規直交基底を $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ とする。物体 B_t の中に点 \boldsymbol{x} をとり、その点における応力テンソルを $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}) = \sigma_{ij}(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j$ とする。点 \boldsymbol{x} を通る x_1 軸に直交する仮想平面で物体 B_t を切断する。このとき、この切断面に直交する単位ベクトル \boldsymbol{e}_1 によって正の側の物体と負の側にある物体を区別することができる。正の側にある物体が負の側にある物体に及ぼす応力ベクトルを考えよう。それはコーシーの公式(4.8)を適用することにより与えられる。この場合、 $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}_1$ であるから、応力ベクトルは次のように書ける。

$$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_1) = t_i^{(1)} \boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{e}_1 = \left\{ \sigma_{ij}(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \right\} \boldsymbol{e}_1 = \left\{ \sigma_{i1}(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{e}_i \right\}$$

成分 $t_1^{(1)} = \sigma_{11}$, $t_2^{(1)} = \sigma_{21}$, $t_3^{(1)} = \sigma_{31}$ は、それぞれ、 x_1 軸に直交する面で物体を仮想的に切断したときに、単位法線ベクトル \boldsymbol{e}_1 が指す側 (正の側) の物体が反対側 (負の側) の物体にその切断面を通して作用する単位面積当たりの力の x_1, x_2, x_3 軸方向成分である。成分 σ_{11} は x_1 軸方向成分、 σ_{21} は x_2 軸方向成分、 σ_{31} は x_3 軸方向成分を表す。成分 σ_{11} は切断面に垂直な方向の力の成分を表すから、垂直応力あるいは法線応力 (normal stress) 成分と呼ばれる。これに対し、成分 σ_{21} と σ_{31} は、切断面内の x_2 軸方向成分および x_3 軸方向成分を表し、せん断応力 (shear stress) 成分と呼ばれる。一般に、成分 σ_{ij} の第1添字 i は、応力ベクトルの成分の方向を、第

2添字 j は切断面に垂直な基底ベクトルの方向に対応する。この定義は現代的な連続体力学に関する文献においてしばしば採用される定義であるが、従来の文献では、第1添字 i が切断面に垂直な基底ベクトルの方向を、第2添字 j が応力ベクトルの成分の方向を表すのが一般的であるから、注意が必要である。こちらの定義に従うと、式(4.8)のコーシーの公式は、

$\mathbf{t}(\mathbf{n}) = \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{n}$ で置き換えられる。もっとも後に説明するように、コーシーの応力テンソルは対称テンソルと見なされることがほとんどなので、実質上違いはない。

次に、上と同じ状況で、負の側の物体が正の側の物体に及ぼす応力ベクトルを考えよう。このときには、切断面に対する単位法線ベクトル \mathbf{n} は $-\mathbf{e}_1$ であるので、

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, -\mathbf{e}_1) = t_i^{(-1)} \mathbf{e}_i = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})(-\mathbf{e}_1) = \left\{ \sigma_{ij}(\mathbf{x}) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \right\} (-\mathbf{e}_1) = \left\{ -\sigma_{i1}(\mathbf{x}) \mathbf{e}_i \right\}$$

すなわち、 $t_1^{(-1)} = -\sigma_{11}$, $t_2^{(-1)} = -\sigma_{21}$, $t_3^{(-1)} = -\sigma_{31}$ となり、応力ベクトルの向きが $\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{e}_1)$ とは反対になる。また以上の結果から、面に対する法線ベクトルが座標軸の正の方向を向いているとき、応力テンソルの成分が正であれば、対応する応力ベクトルの成分は座標軸の正方向、応力テンソルの成分が負であれば、応力ベクトルの成分は負方向を向くことも覚えておこう。

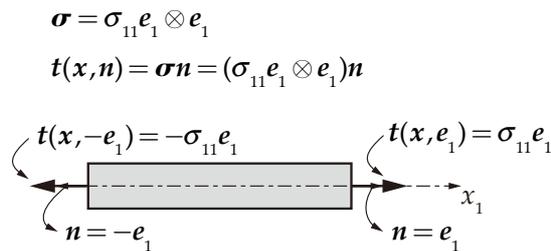


図 4-3 応力ベクトルの成分と応力テンソルの成分の関係（単軸応力状態）

この結果を、一様断面の棒の x_1 軸方向への単軸引張あるいは単軸圧縮、すなわち、応力テンソルが $\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{11} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1$ の場合に当てはめて確かめてみよう（図 4-3 参照）。右方向に x_1 軸の正方向を選ぶと、棒の右端の断面には $t_1^{(1)} = \sigma_{11}$, $t_2^{(1)} = 0$, $t_3^{(1)} = 0$ の応力ベクトルが、左端の断面には $t_1^{(-1)} = -\sigma_{11}$, $t_2^{(-1)} = 0$, $t_3^{(-1)} = 0$ の反対向きの応力ベクトルが作用することになる。そして、 $\sigma_{11} > 0$ であれば引張、 $\sigma_{11} < 0$ であれば圧縮に対応していることは明らかであろう。

x_2 軸および x_3 軸に垂直な断面に生じる応力ベクトルの成分についても上と同様な考察をすることができる。便宜上、点 \mathbf{x} において、座標軸に直交する切断面によってできる微小直方体を考えれば、直方体の外側の物体が内側の物体に及ぼす応力ベクトルの成分は、垂直成分とせん断成分の両者を含む一般の場合、図 4-4 に示すようになる。図には表側の見える面、すなわち面に対する単位法線ベクトル \mathbf{n} が $\mathbf{n} = \mathbf{e}_1, \mathbf{n} = \mathbf{e}_2, \mathbf{n} = \mathbf{e}_3$ である面に作用する応力ベクトルの成分

を実線で、裏側の見えない面 $n = -e_1, n = -e_2, n = -e_3$ に作用する応力ベクトルの成分を破線で示してある。矢印の向きは応力テンソルの成分 σ_{ij} が正の場合の結果を示している。面に対する法線ベクトルが反対向きになると（たとえば $n_3 = e_3$ と $n_3 = -e_3$ のように）、応力ベクトルのすべての成分が反対向きになることが見てとれる。

座標軸の正方向を向く法線ベクトルを持つ面（ $n = e_1, n = e_2, n = e_3$ を持つ面）に作用する応力ベクトルの成分はすべて座標軸の正方向を向いており、座標軸の負方向を持つ法線ベクトルを持つ面に作用する応力ベクトルの成分はすべて負方向をもつことを確認されたい。なお、この直方体は実際に大きさがあるわけではなく、あくまでも正の側の物体と負の側の物体を 3 次元的に区別するために便宜的に導入したものであることを注意する。

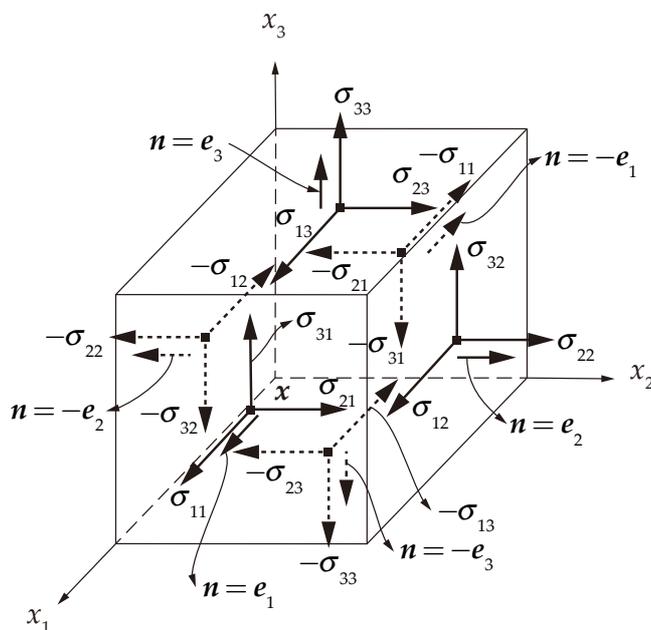


図 4-4 応力ベクトルの成分と応力テンソルの成分の関係（3軸応力状態）。図には応力ベクトルの成分が表示されていることに注意されたい。応力テンソルの成分そのものは点 x の関数として定まり、面の向きには依存しない。応力ベクトルの成分は面が指定されてはじめて値が定まる。面の向きが反対になると応力ベクトルの向きも反対になる。

最後に、応力ベクトルの仮想切断面に対する法線方向成分とせん断成分を求めよう。考える点 x における応力状態がコーシーの応力テンソル $\sigma = \sigma_{ij} e_i \otimes e_j$ で表されているとする。点 x を

通る仮想切断面に対する単位外向き法線ベクトルを \mathbf{n} で表すとき、法線ベクトルが指し示す側の物体が反対側の物体へ仮想切断面を介して及ぼす応力ベクトル \mathbf{t} は、コーシーの公式により、

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \quad \text{あるいは} \quad t_i e_i = \sigma_{ij} n_j e_i$$

で与えられる。このとき、 \mathbf{t} の仮想切断面に対する法線方向成分 σ_n は、応力ベクトル \mathbf{t} と単位外向き法線ベクトル \mathbf{n} との内積によって与えられる。すなわち、

$$\sigma_n = \mathbf{t} \cdot \mathbf{n} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \sigma_{ij} n_i n_j \quad (4.9)$$

法線方向成分の大きさを持つ \mathbf{n} 方向のベクトルを $\boldsymbol{\sigma}_n$ で表せば

$$\boldsymbol{\sigma}_n = \sigma_n \mathbf{n} = \sigma_{ij} n_i n_j \mathbf{n} \quad (4.10)$$

と書ける。このとき、応力ベクトル \mathbf{t} と $\boldsymbol{\sigma}_n$ の差

$$\boldsymbol{\tau}_s = \mathbf{t} - \boldsymbol{\sigma}_n \quad (4.11)$$

を求めれば、それは応力ベクトルの仮想切断平面への射影であり、応力ベクトルのせん断成分を表す。その大きさ $|\boldsymbol{\tau}_s|$ は、ピタゴラスの定理を利用して、

$$|\boldsymbol{\tau}_s| = \left(|\mathbf{t}|^2 - |\boldsymbol{\sigma}_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\left| \sigma_{ij} n_j \sigma_{ik} n_k \right| - \left| \sigma_{ij} n_i n_j \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.12)$$

で与えられる。

問題 4.2

(1) 点 P におけるコーシー応力 $\boldsymbol{\sigma}$ が次のように与えられている。

$$\boldsymbol{\sigma} = 7\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3 + 5\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3$$

(a) 外向き単位法線ベクトル $\mathbf{n} = (2/3)\mathbf{e}_1 - (2/3)\mathbf{e}_2 + (1/3)\mathbf{e}_3$ で表される平面上の応力ベクトルを求めよ。

(b) 上述の応力ベクトルの法線方向への射影を求めよ。またその大きさを求めよ

(2) 点 P におけるコーシー応力 $\boldsymbol{\sigma}$ が次のように与えられている。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} = & \tau \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + a \tau \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + b \tau \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3 + a \tau \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 + \tau \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + c \tau \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3 \\ & + b \tau \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1 + c \tau \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2 + \tau \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

外向き単位法線ベクトルが $\mathbf{n} = (1/\sqrt{3})\mathbf{e}_1 + (1/\sqrt{3})\mathbf{e}_2 + (1/\sqrt{3})\mathbf{e}_3$ で与えられる平面上の応力ベ

クトルが $\mathbf{0}$ となるように定数 a, b, c を定めよ。ただし、 τ はある応力値である。

(3) 点 P におけるコーシーの応力テンソルが次のように与えられている。

$$\boldsymbol{\sigma} = 7\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 - 5\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 - 5\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3$$

点 P を通る平面 $3x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 12$ 上の応力ベクトルを求めよ。ただし、面に対する単位外向き法線ベクトルは原点とは反対方向を向くものとする。

(4) 連続体の応力状態がコーシー応力 $\boldsymbol{\sigma}$ によって次のように与えられている。

$$\boldsymbol{\sigma} = 3x_1x_2\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + 5x_2^2\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + 5x_2^2\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 + 2x_3\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3 + 2x_3\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2$$

円柱面 $x_2^2 + x_3^2 = 4$ の接平面上の点 $P(2, 1, \sqrt{3})$ に作用する応力ベクトルを求めよ。ただし、

面に対する単位外向き法線ベクトルは原点とは反対方向を向くものとする。