

### 3. 物体の運動と変形の記述

本章では、第1章で導入した連続体を対象として、物体の運動と変形に関する運動学 (kinematics) について述べる。以下では、ニュートン力学の基本原則であるガリレイの相対性原理に従うものとする。したがって、時間と空間は独立であり、基準標構が異なっても時間間隔と空間距離は変化しない。すなわち、物体が光速に近い速度で運動するのでなければ、以下の理論は十分な精度で成り立つ。なお、基準標構の概念は第5章で学ぶ。

#### 3.1. 物質表示と空間表示

物体 (body)  $B$  の運動 (motion) を記述するため、原点を  $O$  とするユークリッド点空間  $E^3$  を導入する (図 3-1)。物体  $B$  はこの空間内のある閉領域を占め、第1章で述べた連続体としての性質を持つものとする。物体  $B$  に含まれる物質点 (material point) あるいは物質粒子 (material particle) の  $E^3$  における位置を完全に定めたものを配置 (configuration) と呼ぶ。運動は、時間  $t$  の進行に伴う配置の連続的なシーケンスと定義できる。

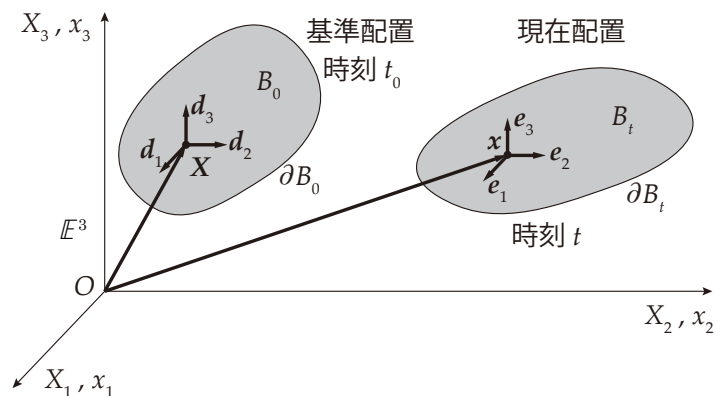


図 3-1 配置の概念図 (物体  $B$  がとる基準配置  $B_0$  と現在配置  $B_t$ )

時刻  $t_0$  において物体  $B$  が占める領域を  $B_0$ 、それを取り囲む閉曲面を  $\partial B_0$  で表し、基準配置 (reference configuration) と呼ぶことにする。基準配置は必ずしも物体が実際にとる配置である必要はないが、以後簡単のため、そのように選ぶことにする。基準配置における物質点に着目し、それを位置ベクトル  $\mathbf{X}$  で表す。基準配置は時間とともに変化せず、点  $\mathbf{X}$  を指定すると特定の物質点を一意に定めることになるから、点  $\mathbf{X}$  を物質点のラベル付けに用いることができる。そのため、点  $\mathbf{X}$  は物質座標 (material coordinate) と呼ばれる。物体  $B$  が運動し、現在時刻  $t$  において領域  $B_t$  を占めるものとする。そして、その領域の閉曲面を  $\partial B_t$  とする。この運動

により、物質点  $X$  は点  $x$  に移動する。現在時刻  $t$  における物体  $B$  の配置を**現在配置**あるいは**現配置** (current configuration) と呼ぶ。物質点  $X$  の現在配置での位置  $x$  は、時間の経過とともに時々刻々変化する。したがって  $x$  は、単純に物質点  $X$  の現在時刻  $t$  における空間の位置を表し、**空間座標** (spatial coordinate) と呼ばれる。

基準配置における物質点  $X$  を示すために、原点  $O$  を中心とする右手系の直交デカルト座標系  $X_\alpha$  ( $\alpha=1,2,3$ ) を導入する (図 3-1 参照)。また現在配置での物質点の位置  $x$  を、原点を共有し、 $X_\alpha$  と重なり合う直交デカルト座標系  $x_i$  ( $i=1,2,3$ ) で表現する。ここで、基準配置に関する指標にギリシア文字を、現在配置に関する指標にラテン文字を用いて区別した。このとき、基準配置と現在配置における物質点において座標線の正方向を向く正規直交基底を導入し、点  $X$  における正規直交基底を  $d_\alpha$  ( $\alpha=1,2,3$ )、点  $x$  における正規直交基底を  $e_i$  ( $i=1,2,3$ ) とする。直交デカルト座標系の場合、座標線に沿う方向は場所によって変化せず、基底ベクトルも場所には依存しない。したがって、 $(d_1, d_2, d_3)$  と  $(e_1, e_2, e_3)$  は実際には同一のものとなるが、位置の違いを明示するために区別することにする。なお、基準配置と現在配置を異なった座標系で記述する場合や、原点を共有する同一の座標系でも曲線座標系の場合には、両配置での基底ベクトルは一般には異なり、解析は著しく複雑になる。本書ではこのような場合は扱わず、一貫して基準配置と現在配置で共通の直交デカルト座標系を用いる。

物体の運動は、基準配置での点  $X$  から現在配置での点  $x$  への写像

$$x = \chi(X, t) \quad (3.1)$$

と考えることができる。関数  $\chi$  は、引数に関して、必要な階数だけ連続微分可能であると仮定する。この関数は、しばしば**変形関数** (deformation function) あるいは**変形** (deformation) と呼ばれる。式(3.1)は、時刻  $t_0$  に点  $X$  にあった物質点が現在の時刻  $t$  において占める位置が点  $x$  であることを表す。このとき、運動によって物体にき裂が生じる現象や2つの面が一つの面に合体する現象を特別に扱うべき例外として除外すれば、式(3.1)は点  $X$  と点  $x$  との間の 1 対 1 写像と考えることができる。この場合、**逆写像** (inverse mapping)

$$X = \chi^{-1}(x, t) \quad (3.2)$$

が存在する。すなわち、時刻  $t$  において現在配置  $x$  にある物質点の基準配置での位置  $X$  を一意に定めることができる。なお、誤解の恐れがない場合には、式(3.1)の代わりに、関数名と関数値を一致させた

$$x = x(X, t)$$

という表現も適宜用いられる。

さて、物質点の移動量を表す**変位ベクトル** (displacement vector) を導入しよう。独立変数として基準配置での物質点  $X$  と時刻  $t$  を用いた表示

$$\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t) = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X} = \hat{u}_\alpha(X_1, X_2, X_3, t) \mathbf{d}_\alpha \quad (3.3)$$

と、現在配置での点  $\mathbf{x}$  と時刻  $t$  を用いた表示

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x} - \boldsymbol{\chi}^{-1}(\mathbf{x}, t) = u_i(x_1, x_2, x_3, t) \mathbf{e}_i \quad (3.4)$$

の二通りの表示法で表現できる。式(3.3)において、点  $\mathbf{X}$  を一定に保つことが同一の物質粒子に着目して物体の運動を追跡することに対応することから、この表示法は**物質表示** (material description) あるいは**ラグランジュ表示** (Lagrange description) と呼ばれる。一般に運動によって大きく形を変えず、基準配置が重要な役割を果たす固体の力学解析に便利な考え方である。他方、式(3.4)は、**空間表示** (spatial description) あるいは**オイラー表示** (Euler description) と呼ばれる。点  $\mathbf{x}$  を一定に保つということは空間の 1 点に観測点を固定することを意味する。空間の 1 点に観測点を選び、時間の経過とともにその点を通過する物質粒子の挙動を観測することによって現象を記述しようという考え方である。流体力学で伝統的に採用されている表示法である。自由に形を変え、物質粒子の追跡が困難な流体の解析に適した方法と言える。なお、関数  $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t)$  と  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  は、時刻、物質点が同じであれば同じ値を与えるが、関数形は一般に異なる。そのことを明示するために、物質表示の場合の関数の上に (  $\hat{\quad}$  ) を付けて区別することにする。

次に**速度** (velocity) および**加速度** (acceleration) を定義しよう。速度および加速度とは、一つの物質点が持つ物理量であり、したがって物質表示を用いれば簡単に求められる。すなわち、速度  $\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{X}, t)$  は、位置  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t)$  の時間  $t$  に関する単なる偏微分である。

$$\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial}{\partial t} x_i(X_1, X_2, X_3, t) \mathbf{e}_i \quad (3.5)$$

同様に加速度  $\hat{\mathbf{a}}(\mathbf{X}, t)$  は、速度  $\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{X}, t)$  の時間に関する偏微分

$$\hat{\mathbf{a}}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \hat{\mathbf{v}}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} x_i(X_1, X_2, X_3, t) \mathbf{e}_i \quad (3.6)$$

で与えられる。このように、物質点  $\mathbf{X}$  が持つ物理量  $\mathcal{A}$  の時間変化率を求める演算を、**物質時間導関数** (material time derivative) と呼び、記号  $D\mathcal{A}/Dt$  で表す。具体的には、物質点  $\mathbf{X}$  を一定にして時間微分をとることを意味する。ここで  $\mathcal{A}$  は、物質点  $\mathbf{X}$  が持つ、スカラー、ベクトルあるいはテンソルで表現される物理量を表す。したがって、物質表示の場合には、 $D\mathcal{A}/Dt$  は  $\partial\mathcal{A}(\mathbf{X}, t)/\partial t$  に等しいことになる。

これに対し、空間表示で速度を表すには注意が必要である。たとえば空間表示による変位  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  を時間  $t$  に関して偏微分しても、それは速度を表さない。点  $\mathbf{x}$  における物質点が時々刻々変わるため、点  $\mathbf{x}$  を一定にして時間  $t$  に関して偏微分しても、同一物質点に関する物理量の時間変化率とはならないからである。それではどのようにすれば良いのか。空間表示による

速度  $v(\mathbf{x}, t)$  は、物質表示による速度の表示式(3.5)における独立変数  $\mathbf{X}$  を、式(3.2)によって変数  $\mathbf{x}$  に置き換えることにより得られる。すなわち、

$$v(\mathbf{x}, t) = \hat{v}(\mathbf{X}, t) = \hat{v}(\boldsymbol{\chi}^{-1}(\mathbf{x}, t), t) = v_i(x_1, x_2, x_3, t) \mathbf{e}_i \quad (3.7)$$

空間表示による加速度は、式(3.7)を  $v(\mathbf{x}, t) = v(\boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t), t)$  と考え、変数  $(\mathbf{x}, t)$  から変数  $(\mathbf{X}, t)$  への変数変換に対して微分の鎖律を適用することによって得られる。すなわち、微分の鎖律

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} v(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t) \right|_{\mathbf{x}} = \frac{\partial v(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} + \frac{\partial v(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial t}$$

に留意すれば

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \frac{Dv(\mathbf{x}, t)}{Dt} = \frac{\partial v(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} v(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial v(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \quad (3.8)$$

と書ける。成分を用いて演算を具体的に表示すれば

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) &= \frac{Dv(\mathbf{x}, t)}{Dt} = a_i(x_1, x_2, x_3, t) \mathbf{e}_i = \frac{Dv_i(x_1, x_2, x_3, t)}{Dt} \mathbf{e}_i \\ &= \frac{\partial v_i(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_j} v_j(x_1, x_2, x_3, t) \mathbf{e}_i + \frac{\partial v_i(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial t} \mathbf{e}_i \\ &= \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} v_2 + \frac{\partial v_1}{\partial x_3} v_3 + \frac{\partial v_1}{\partial t} \right) \mathbf{e}_1 + \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} v_2 + \frac{\partial v_2}{\partial x_3} v_3 + \frac{\partial v_2}{\partial t} \right) \mathbf{e}_2 \\ &\quad + \left( \frac{\partial v_3}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} v_2 + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} v_3 + \frac{\partial v_3}{\partial t} \right) \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (3.9)$$

とかける。式(3.8)における最右辺第 1 項は**移流項**あるいは**対流項** (convective term) とよばれ、時刻  $t$  において点  $\mathbf{x}$  にあった物質点が次の瞬間に他の位置へ移動する効果を表す。これに対し最右辺第 2 項は点  $\mathbf{x}$  における速度そのものが変化する効果を表す。一般に、空間の位置  $\mathbf{x}$  を固定した場合のその点における物理量の時間変化率を、**空間時間導関数** (spatial time derivative) というが、上記第 2 項はそれに対応する。以上の考え方を任意の物理量  $\mathcal{A}$  に対して適用すれば、空間表示における物質時間導関数の一般形は、移流項と空間時間導関数の和として、次のように書ける。

$$\frac{D\mathcal{A}(\mathbf{x}, t)}{Dt} = \frac{\partial \mathcal{A}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} v(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial \mathcal{A}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \quad (3.10)$$

なお、本書では、変数  $\mathcal{A}$  の物質時間導関数  $D\mathcal{A}/Dt$  を表す際に、変数名  $\mathcal{A}$  の上にドットを付けた  $\dot{\mathcal{A}}$  をしばしば用いる。また括弧で括られた式全体の物質時間導関数を表す場合に、その括弧の右肩にドットを付けた (  $\cdot$  ) を用いることにも留意されたい。

### 問題 3.1

- (1) 現在配置での位置ベクトル  $\mathbf{x}$  が、物質座標  $(X_1, X_2, X_3)$  と時間  $t$  並びに現在配置での基底ベクトル  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  によって、次式で与えられている。

$$\mathbf{x} = \{X_1 + X_2(e^t - 1)\}\mathbf{e}_1 + \{X_1(e^{-t} - 1) + X_2\}\mathbf{e}_2 + X_3\mathbf{e}_3$$

基準配置での位置ベクトル  $\mathbf{X}$  を、空間座標  $(x_1, x_2, x_3)$  と時間  $t$ 、並びに基準配置での基底ベクトル  $(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3)$  によって表せ。本書では、基準配置および空間配置における正規直交基底が等しくなるように選ばれていることに留意せよ。

- (2) 次式で表される運動に対し、変位ベクトル  $\mathbf{u}$  の成分を物質表示と空間表示の両方で求めよ。

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 = X_1\mathbf{e}_1 + (X_2 + AX_3)\mathbf{e}_2 + (X_3 + AX_2)\mathbf{e}_3$$

- (3) 変位ベクトルが物質表示にて  $\mathbf{u} = 4X_1^2\mathbf{d}_1 + X_2X_3^2\mathbf{d}_2 + X_1X_3^2\mathbf{d}_3$  で与えられるとき、基準配置において点  $(1, 0, 2)$  にあった点の変位後の位置ベクトル  $\mathbf{x}$  を求めよ。
- (4) 連続体の変位  $\mathbf{u} = (3X_2 - 4X_3)\mathbf{d}_1 + (2X_1 - X_3)\mathbf{d}_2 + (4X_2 - X_1)\mathbf{d}_3$  を受けている。点  $A(1, 0, 3)$  と  $B(3, 6, 6)$  を結ぶベクトルの移動後の値を求めよ。また点  $C(2, 6, 3)$  の移動後の位置を求めよ。
- (5) 連続体の運動が

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 \\ &= X_1\mathbf{e}_1 + \left\{e^t(X_2 + X_3)/2 + e^{-t}(X_2 - X_3)/2\right\}\mathbf{e}_2 + \left\{e^t(X_2 + X_3)/2 - e^{-t}(X_2 - X_3)/2\right\}\mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

で与えられている。速度成分を、物質表示と空間表示の両方で求めよ。

- (6) 速度場が次のように与えられている。

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3 = \{x_1/(1+t)\}\mathbf{e}_1 + \{2x_2/(1+t)\}\mathbf{e}_2 + \{3x_3/(1+t)\}\mathbf{e}_3$$

この運動に対する加速度成分を求めよ。

- (7) 問題(6)の速度方程式を積分し、変位の関係

$$\mathbf{x} = x_1(X_1, X_2, X_3, t)\mathbf{e}_1 + x_2(X_1, X_2, X_3, t)\mathbf{e}_2 + x_3(X_1, X_2, X_3, t)\mathbf{e}_3$$

を求めよ。そしてその式から、物質表示の速度成分と加速度成分を求めよ。

- (8) 速度場が速度ベクトル

$$\mathbf{v}(x_1, x_2, x_3, t) = x_1^2 t \mathbf{e}_1 + x_2 t^2 \mathbf{e}_2 + x_1 x_3 t \mathbf{e}_3$$

で与えられている。時刻  $t=1$  において、空間座標  $(x_1, x_2, x_3) = (1, 3, 2)$  にあった物質点  $P$  の速度と加速度を求めよ。

### 3.2. 変形勾配テンソル

前節では、物体内のある一点の運動を扱った。運動により物質点はその位置を変える。しかしその位置変化は、必ずしも物体の内部に発生する力（以下内力 (internal force) という）と

は結びつかない。運動には剛体並進運動や剛体回転運動が含まれ、それらは内力の発生要因とはならないからである。内力の発生と関連する運動を考察するためには物体内部の2点間の相対運動を考える必要がある。2点間の距離が変化すると内力が発生するからである。

基準配置において点  $\mathbf{X}$  の近傍に点  $\mathbf{X} + \Delta\mathbf{X}$  を選び、点  $\mathbf{X}$  と点  $\mathbf{X} + \Delta\mathbf{X}$  の2点間の微小線素ベクトル  $\Delta\mathbf{x}$  の変化を考える。点  $\mathbf{X}$  と点  $\mathbf{X} + \Delta\mathbf{X}$  は、運動  $\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t)$  により、それぞれ現在配置の点  $\mathbf{x}$  と点  $\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}$  に移動する。すなわち、基準配置での微小線素ベクトル  $\Delta\mathbf{X}$  が現在配置での微小線素ベクトル  $\Delta\mathbf{x}$  に写像されることになる。その写像を考察することによって、点  $\mathbf{X}$  の近傍の変形状態を明らかにできる。点  $\mathbf{X}$  と点  $\mathbf{x}$  の間の関係(3.1)により、運動後の現在配置での微小線素ベクトル  $\Delta\mathbf{x}$  は

$$\Delta\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X} + \Delta\mathbf{X}, t) - \chi(\mathbf{X}, t) \quad (3.11)$$

と表される。式(3.11)の右辺第1項をテイラー展開 (Taylor expansion) するため、ベクトル値関数  $\chi(\mathbf{X} + h\Delta\mathbf{X}, t)$  を考える。ここで  $h$  はスカラーである。  $h$  に関するベクトル値関数のテイラー展開によって

$$\chi(\mathbf{X} + h\Delta\mathbf{X}, t) = \sum_{k=0}^n \frac{h^k}{k!} \frac{d^k}{dh^k} \chi(\mathbf{X} + h\Delta\mathbf{X}, t) \Big|_{h=0} + o(h^n) \quad (3.12)$$

の関係を得る。ここで  $o(h^n)$  は、

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h^n)}{h^n} = 0 \quad (3.13)$$

の性質を持つ近似誤差を表すベクトルである。式(3.12)において  $n=1$  とおき、1次の項まで残せば、

$$\chi(\mathbf{X} + h\Delta\mathbf{X}, t) = \chi(\mathbf{X}, t) + h \frac{d}{dh} \chi(\mathbf{X} + h\Delta\mathbf{X}, t) \Big|_{h=0} + o(h) \quad (3.14)$$

の関係を得る。さらに  $h=1$  とおき、微小変化  $\Delta\mathbf{x}$  の主要部  $d\mathbf{x}$  を考えれば、式(3.11)は

$$\Delta\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X} + \Delta\mathbf{X}, t) - \chi(\mathbf{X}, t) \simeq d\mathbf{x} = \frac{d}{dh} \chi(\mathbf{X} + h\Delta\mathbf{X}, t) \Big|_{h=0} \quad (3.15)$$

となる。ここで  $d\mathbf{X}$  は、独立変数である  $\Delta\mathbf{X}$  自身の主要部であり、 $\Delta\mathbf{X}$  に等しい。第2章13節で議論したベクトル場の方向微分に関する理論展開を参考にすると、上式は次のように変形できる。

$$\begin{aligned} d\mathbf{x} &= \frac{d}{dh} \chi(\mathbf{X} + h\Delta\mathbf{X}, t) \Big|_{h=0} = \frac{\partial \chi}{\partial (X_\alpha + h dX_\alpha)} \frac{\partial (X_\alpha + h dX_\alpha)}{dh} \Big|_{h=0} = \frac{\partial \chi}{\partial X_\alpha} dX_\alpha \\ &= \frac{\partial (x_i \mathbf{e}_i)}{\partial X_\alpha} dX_\alpha = \left( \frac{\partial x_i}{\partial X_\alpha} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{d}_\alpha \right) (dX_\beta \mathbf{d}_\beta) = \mathbf{F} d\mathbf{X} \end{aligned} \quad (3.16)$$

ここで

$$\mathbf{F} = \frac{\partial x_i}{\partial X_\alpha} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{d}_\alpha = F_{i\alpha} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{d}_\alpha \quad (3.17)$$

は変形勾配テンソル (deformation gradient tensor) と呼ばれる. 式(3.16)からわかるように, 変形勾配テンソル  $\mathbf{F}$  は基準配置にある微小線素ベクトル  $d\mathbf{X}$  に作用し, 現在配置の微小線素ベクトル  $d\mathbf{x}$  を与える線形写像である (図 3-2 参照). 基準配置にある微小線素ベクトル  $d\mathbf{X}$  は任意に選ぶことができるから, 式(3.16)により, 点  $\mathbf{X}$  の近傍の変形状態を, 線形近似の範囲内で完全に把握できる. その意味で, 変形の解明は変形勾配テンソルを解析することで可能になる. なお, 変形勾配テンソル  $\mathbf{F}$  だけで変形状態を記述する物質を, **単純物質** (simple material) という. 単純という名前にもかかわらず, 我々が扱う多くの物質が単純物質によって近似されており, その研究は重要な意義を有する. より複雑な内部構造をもつ物質を扱う理論も展開されており, たとえば式(3.12)におけるテイラー展開において最初の  $n$  項を採用する  **$n$ 次物質** (material of grade  $n$ ) の理論がある. 単純物質は  $n=1$  の場合に相当する.  $n$ 次物質の理論は大変高度であり, 本書の程度を越えるので, 以後議論しない.

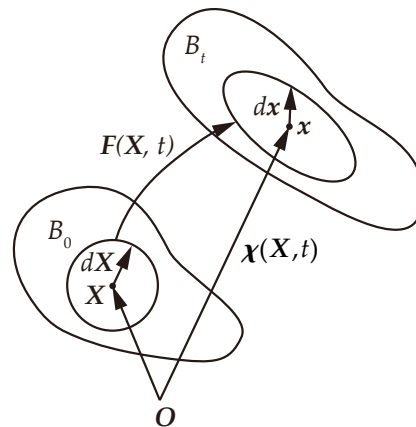


図 3-2 変形勾配テンソルによる物質点近傍の写像

変形勾配テンソルの基底は式(3.17)からわかるように  $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{d}_\alpha$  であり, テンソル積記号  $\otimes$  の両側の基底が異なっている. このことは変形勾配テンソル  $\mathbf{F}$  が, 基準配置と現在配置の両方に係わる特殊なテンソルであることを示している. 具体的には, 基準配置にあるベクトルに作用し, 現在配置のベクトルに写像するということである. このようなテンソルは, 基準配置と現在配置の2つの位置に係わるテンソルという意味で, **2点テンソル** (two-point tensor) と呼ばれる. テンソル積における基底の順番が写像の向きを表していることに注意して欲しい. たとえば右写像の場合, テンソル積の右側の基底ベクトルが定義された点から, 左側の基底が定義された点への写像ということになる. その意味でテンソル積の順番が逆になる転置の演算は, 写

像の向きが逆になる演算と言える。このことは後ほど示す変形勾配テンソルの逆写像についても言える。

式(3.17)は次のようにも表現できることを付記する。

$$\mathbf{F} = \frac{\partial x_i}{\partial X_\alpha} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{d}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \otimes \mathbf{d}_\alpha = \mathbf{x} \otimes \left( \frac{\partial}{\partial X_\alpha} \mathbf{d}_\alpha \right) = \mathbf{x} \otimes \nabla_{\mathbf{X}} = \text{Grad } \mathbf{x} \quad (3.18)$$

ここで  $\nabla_{\mathbf{X}}$  は

$$\nabla_{\mathbf{X}} = \frac{\partial}{\partial X_\alpha} \mathbf{d}_\alpha \quad (3.19)$$

で定義される基準配置に関する微分演算子である。同様に、Grad も基準配置に関する勾配演算子という意味で、以前定義した演算子 grad の頭文字を大文字に変更し、区別している。

変形勾配テンソル  $\mathbf{F}$  の導入により、基準配置における微小線素ベクトル  $d\mathbf{X}$  と現在配置での微小線素ベクトル  $d\mathbf{x}$  との関係式(3.16)が得られた。すでに述べたように変形が可逆であれば、現在配置から基準配置への逆写像、すなわち式(3.16)の逆の写像が存在する。すなわち、

$$d\mathbf{X} = \mathbf{F}^{-1} d\mathbf{x} \quad (3.20)$$

ここで  $\mathbf{F}^{-1}$  は  $\mathbf{F}$  の逆写像であり、次のように表現できる。

$$\mathbf{F}^{-1} = (\mathbf{F}^{-1})_{\alpha i} \mathbf{d}_\alpha \otimes \mathbf{e}_i = \left( \frac{\partial X_\alpha}{\partial x_i} \right) \mathbf{d}_\alpha \otimes \mathbf{e}_i \quad (3.21)$$

テンソル積の基底の順番が式(3.17)とは逆になっていることに注目して欲しい。このことは式(3.20)が示唆するように、 $\mathbf{F}^{-1}$  が現在配置から基準配置への写像であることを示している。なお、 $\mathbf{F}$  と  $\mathbf{F}^{-1}$  の間には、式(2.98)と(2.99)の関係が成り立つことを以下のように示すことができる。

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{F} &= \left( \frac{\partial X_\alpha}{\partial x_i} \mathbf{d}_\alpha \otimes \mathbf{e}_i \right) \left( \frac{\partial x_j}{\partial X_\beta} \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{d}_\beta \right) = \frac{\partial X_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial x_j}{\partial X_\beta} \delta_{ij} (\mathbf{d}_\alpha \otimes \mathbf{d}_\beta) = \delta_{\alpha\beta} (\mathbf{d}_\alpha \otimes \mathbf{d}_\beta) = \mathbf{I} \\ \mathbf{F} \mathbf{F}^{-1} &= \left( \frac{\partial x_i}{\partial X_\alpha} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{d}_\alpha \right) \left( \frac{\partial X_\beta}{\partial x_j} \mathbf{d}_\beta \otimes \mathbf{e}_j \right) = \frac{\partial x_i}{\partial X_\alpha} \frac{\partial X_\beta}{\partial x_j} \delta_{\alpha\beta} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) = \delta_{ij} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) = \mathbf{I} \end{aligned} \quad (3.22)$$

最後に、変形勾配テンソル  $\mathbf{F}$  と変位ベクトル  $\mathbf{u}$  との関係性を求めておこう。まず、変位ベクトル  $\mathbf{u}$  の物質表示による表現  $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t)$  の基準配置  $\mathbf{X}$  に関する勾配  $\mathbf{Z}_{\mathbf{X}} = \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t) \otimes \nabla_{\mathbf{X}}$  を考えると

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_{\mathbf{X}} &= \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t) \otimes \nabla_{\mathbf{X}} = (\mathbf{x} - \mathbf{X}) \otimes \nabla_{\mathbf{X}} = \mathbf{x} \otimes \nabla_{\mathbf{X}} - \mathbf{X} \otimes \nabla_{\mathbf{X}} \\ &= \mathbf{F} - (\mathbf{X}_\alpha \mathbf{d}_\alpha) \otimes \left( \frac{\partial}{\partial X_\beta} \mathbf{d}_\beta \right) = \mathbf{F} - \delta_{\alpha\beta} \mathbf{d}_\alpha \otimes \mathbf{d}_\beta = \mathbf{F} - \mathbf{I} \end{aligned} \quad (3.23)$$

という結果を得る。 $\mathbf{Z}_{\mathbf{X}}$  は基準配置に関する変位勾配テンソル (displacement gradient tensor) と呼ばれる。この関係は、後に示す基準配置を参照する変形の測度 (measure of deformation) を議論する際に重要な役割を果たす。



つづいて  $F^{-1}$  と変位ベクトル  $\mathbf{u}$  の空間表示による表現式(3.4)との関係を求める。まず、式(3.19)の基準配置に関する微分演算子に対応して、現在配置に関する微分演算子

$$\nabla_x = \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{e}_i \quad (3.24)$$

を導入する。関係式  $\mathbf{X} = \mathbf{x} - \mathbf{u}$  に対し微分をとると、 $d\mathbf{X} = d\mathbf{x} - d\mathbf{u}$  の関係を得る。現在配置に関する変位勾配を次式で定義する。

$$\mathbf{Z}_x = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \otimes \nabla_x = u_i \mathbf{e}_i \otimes \frac{\partial}{\partial x_j} \mathbf{e}_j = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad (3.25)$$

ここで変位に関する指標表示は現在配置における基底ベクトル  $\mathbf{e}_i (i=1,2,3)$  に関して展開していることに注意する。それに合わせ、変位成分の指標もギリシア文字ではなくラテン文字で表している。現在配置に関する変位勾配を現在配置での微小線素ベクトル  $d\mathbf{x}$  に適用すると、

$$\mathbf{Z}_x d\mathbf{x} = \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \right) (dx_k \mathbf{e}_k) = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j \mathbf{e}_i = d\mathbf{u} \quad (3.26)$$

となるから、 $d\mathbf{X} = F^{-1}d\mathbf{x}$  と  $d\mathbf{X} = d\mathbf{x} - d\mathbf{u}$  の関係を用いて、

$$d\mathbf{X} = F^{-1}d\mathbf{x} = d\mathbf{x} - d\mathbf{u} = I d\mathbf{x} - \mathbf{Z}_x d\mathbf{x} = (I - \mathbf{Z}_x) d\mathbf{x} \quad (3.27)$$

の関係を得る。これから、次の関係がわかる。

$$F^{-1} = I - \mathbf{Z}_x \quad (3.28)$$

この結果は、後に現在配置を参照する変形の測度を議論する際に重要な役割を果たす。

ここで、上で用いた基準配置を参照する量、あるいは現在配置を参照する量という概念を説明しよう。考察の対象とする物理量を本来の定義に従って記述したとき、基準配置における基底ベクトル  $\mathbf{d}_\alpha$  によって、 $\mathbf{a} = a_\alpha \mathbf{d}_\alpha$  の形に表現されるとき、その物理量は基準配置を参照するベクトルであるという。これに対し、現在配置における基底ベクトル  $\mathbf{e}_i$  によって、 $\mathbf{b} = b_i \mathbf{e}_i$  の形に表現されるとき、その物理量は現在配置を参照するベクトルであるという。同様の考え方に従えば、対象となる物理量が  $\mathbf{G} = G_{\alpha\beta} \mathbf{d}_\alpha \otimes \mathbf{d}_\beta$  の形に表現されれば、それは基準配置を参照す

る2階のテンソルであり、 $\mathbf{H} = H_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$  の形に表現されれば現在配置を参照する2階のテンソル

ということになる。この概念に従えば、変形勾配テンソル  $F$  は、本来の定義によると  $F = F_{i\alpha} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{d}_\alpha$  と表現できるから、基準配置と現在配置の両方を参照するテンソルとすることができる。なお、この概念は物質表示および空間表示の概念とは無関係であることに注意する必要がある。物質表示は、独立変数として物質座標  $\mathbf{X}$  と時間  $t$  を採用して現象を記述しようとする考え方であり、空間表示は、独立変数として空間座標  $\mathbf{x}$  と時間  $t$  を採用して現象を記述しよ

うとする考え方である。対象とする物理量が基準配置を参照する量であるか、現在配置を参照する量であるかに関わりなく、それを記述する独立変数が物質座標と時間であれば物質表示、空間座標と時間であれば空間表示になる。実際、 $\mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t)$  の関係を用いれば、

$(\mathbf{x}, t) = (\boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t), t)$  によって、いつでも独立変数を  $(\mathbf{x}, t)$  から  $(\mathbf{X}, t)$  に変換でき、また  $\mathbf{X} = \boldsymbol{\chi}^{-1}(\mathbf{x}, t)$  の関係によって、 $(\mathbf{X}, t)$  から  $(\mathbf{x}, t)$  に変換できる。すなわち、基準配置、現在配置いずれを参照する物理量であっても、有用か否かは別にして、物質表示と空間表示の両方が可能である。

### 問題 3.2

(1) 変形が次のように与えられている。変位ベクトル  $\mathbf{u}$ ，変形勾配  $\mathbf{F}$ ，変形勾配の逆  $\mathbf{F}^{-1}$  を求めよ。ただし、 $\delta, \gamma, \eta$  は定数であり、また  $\gamma^2 + \eta^2 = 1$  の関係があるものとする。基底も明示せよ。

(a)  $\mathbf{x} = (1 + \delta)X_1\mathbf{e}_1 + (1 - \delta)X_2\mathbf{e}_2 + X_3\mathbf{e}_3$

(b)  $\mathbf{x} = (X_1 + \gamma X_2)\mathbf{e}_1 + X_2\mathbf{e}_2 + X_3\mathbf{e}_3$

(c)  $\mathbf{x} = (X_1 + \gamma X_2)\mathbf{e}_1 + \eta X_2\mathbf{e}_2 + X_3\mathbf{e}_3$

(d)  $\mathbf{x} = (\eta X_1 - \gamma X_2)\mathbf{e}_1 + (\gamma X_1 + \eta X_2)\mathbf{e}_2 + X_3\mathbf{e}_3$

(2) 変位場  $\mathbf{u} = X_1X_3^2\mathbf{d}_1 + X_1^2X_2\mathbf{d}_2 + X_2^2X_3\mathbf{d}_3$  が与えられている。変位勾配  $\mathbf{Z}_x$  と変形勾配  $\mathbf{F}$  を求めよ。