数学展望 I **第 10 回：正多面体群 (2)**

正 6 面体群 (＝正 8 面体群) が 4 次対称群であることを見る.

9.1　**4 次対称群**

まず, 4 次対称群 S_4 にはどのような元が含まれているかを型ごとに分類してみよう.

$$\begin{aligned} e &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \\ (12) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \\ (12)(34) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \\ (123) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \\ (1234) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

定義 9.1. $(12\cdots k)$ は $1 \to 2,\ 2 \to 3, \ldots, k-1 \to k,\ k \to 1$ のような置換 (他の文字は動かさない！) を表す. この型の置換を k **巡環**という. 特に, (12) のように 2 文字だけを動かす置換を**互換**という.

(12)(34) は (12) と (34) の積であるが, これは (34)(12) と書いても同じである. 一方, $(123) = (13)(12)$ と書けるが, これは $(12)(13) = (132)$ とは等しくないので注意！

一般に, どんな置換も 2 文字ずつ交換すれば得られるはずなので, 次の主張が言える.

定理 9.2. **任意の置換は互換の積で書ける**. その表し方は一意的ではないが, 偶数個で書けるか奇数個で書けるかは決まっており, それぞれの場合に応じて, **偶置換**, **奇置換**と呼ぶ.

例 9.3. 次の等式を確認せよ:

$$(12)(34)(12) = (34), \quad (23)(12)(23) = (13), \quad (1234) = (14)(13)(12)$$

偶数＋偶数＝偶数だから,

定義 9.4. 4 次の偶置換の全体のなす部分群を **4 次交代群** A_4 と言う.

9.2　正６面体群

正６面体の１つの面の頂点を反時計周りに P_1, P_2, P_3, P_4 とする．反対の面にある対角線の端の点をそれぞれ Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 とすると，この正６面体の合同変換は，対角線 $P_1Q_1, P_2Q_2, P_3Q_3, P_4Q_4$ の間の置換を引き起こす．異なる合同変換には異なる置換が対応しているので，この対応により，正６面体群を４次対称群 S_4 の部分群とみなすことができる．しかし，$|S_4| = 24$ であり，既に見たように正多面体群の位数も 24 だから，正多面体群は S_4 そのものに他ならない．まとめると，

定理 9.5. 正６面体群は４次対称群 S_4 (に同型) である.

例 9.6. (1234), (12)(34), (123), (12) に対応する正６面体の合同変換を記述せよ．

S_4 にはどのような部分群が存在するだろうか? 次の定理によれば，S_4 の部分群 H の位数の可能性は，

$$|H| = 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24$$

である．同様に４次交代群 A_4 の部分群の位数の可能性は，上記の 24 以外の数であるが，A_4 には位数 6 の部分群は存在しない．