数学展望 I **第 5 回：単体的複体 (正多面体の展開図との関係)**

単体的複体の概念を導入し, その中で凸多面体がどのような位置付けにあるかを考える. また, h 列の概念を導入して, Dehn–Sommerville 方程式を紹介する.

4.1 前節までの内容の整理

3 次元凸多面体 $\mathcal{P}$ に対して, $\mathcal{P}$ のすべての面が三角形であるとき, $\mathcal{P}$ は**単体的** (simplicial) であると言い, $\mathcal{P}$ の各頂点に 3 本の辺が集まっているとき, $\mathcal{P}$ は**単純** (simple) であると言う.

オイラーの多面体公式 $E = V + F - 2$ の下では,
<u>(V, F) がある 3 次元多面体の (頂点数, 面の数) として書けるための条件</u> は,

$$V \le 2F - 4, \quad F \le 2V - 4 \qquad (\text{特に}, V, F \ge 4)$$

である. このとき,

$$\begin{aligned} \mathcal{P} \text{ は単体的} &\iff (V, F) \text{ は直線 } F = 2V - 4 \text{ 上にある} \\ \mathcal{P} \text{ は単純} &\iff (V, F) \text{ は直線 } V = 2F - 4 \text{ 上にある} \end{aligned}$$

として, 特徴づけることができる.
例えば, 正多面体 $\mathcal{P}_4, \mathcal{P}_6, \mathcal{P}_8, \mathcal{P}_{12}, \mathcal{P}_{20}$ はそれぞれ $P_4(4,4)$, $P_6(8,6)$, $P_8(6,8)$, $P_{12}(20,12)$, $P_{20}(12,20)$ に対応している.

4.2 単体的複体

テーマ：「オイラーの多面体公式」は「球面のオイラー数 = 2」と解釈することができる. 他の曲面のオイラー数を計算するための手段 (三角形分割) として単体的複体の概念を導入しよう.

正の整数 n に対して, $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ は 1 から n までの整数全部のなす集合を表す.

<u>**注意**</u> **1.** 一般に, A の部分集合全体のなす集合を A の**べき集合**と言い, 2^A と書く. $A = [n]$ のように n 個の元 (要素) からなる集合に対して, A のべき集合 2^A は 2^n 個の元 ($[n]$ の部分集合!) からなることに注意せよ.

<u>**定義**</u> **4.1 (単体的複体).** Δ が $[n]$ を頂点集合に持つ ($[n]$ 上の) **単体的複体** (simplicial complex) であるとは, Δ が $2^{[n]}$ の部分集合で, 次の条件をみたすことと定める:

(1)$i \in [n] \Longrightarrow \{i\} \in \Delta$.

(2) $F \in \Delta, G \subseteq F \Longrightarrow G \in \Delta$.

<u>**定義**</u> **4.2.** Δ を $[n]$ 上の単体的複体とする. $F \in \Delta$ に対して, F に含まれる元 (整数!) の個数を $\#(F)$ と表すとき, $\dim F = \#(F) - 1$ を F の**次元** (dimension) と言う. $\dim F = i$ のとき, $F \in \Delta$ を Δ の i-**面**と言う. $\Delta \neq \emptyset$ のとき, $\dim \Delta = \max\{\dim F \mid F \in \Delta\}$ を Δ の**次元**と言う.

定義 4.3. $\Delta \neq \emptyset$ を $[n]$ 上の単体的複体とする．各非負整数 $i \in \mathbb{Z}$ に対して,

$$f_i(\Delta) = \#\{F \in \Delta \mid \dim F = i\} \quad (\Delta \text{ の } i \text{ 面の個数})$$

とおき, $(f_0, f_1, \ldots, f_{d-1})$ を Δ の f 列と言う．ただし, $\dim \Delta = d-1$ とする．

例 4.4. $\Delta = \{\{1,2,3\},\{3,4\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\emptyset\}$
とおくと, Δ は $[4]$ 上の 2 次元の単体的複体であり, $f(\Delta) = (4,4,1)$ である．

単体的複体の定義より, $\{1,2,3\}$ と $\{3,4\}$ が Δ に含まれれば,
他の部分集合は (もちろん $\emptyset$ も) 自動的に Δ に含まれる．そこで,
$\Delta = \langle\{1,2,3\},\ \{3,4\}\rangle$ と書くこともある．

さて, 重要なのは次の例である．

定義 4.5 (境界複体). $\mathcal{P}$ を 3 次元凸多面体とし, その頂点の集合を $[n]$ とする．このとき,

$$\Delta = \Delta(\mathcal{P}) := \{F \subseteq [n] \mid F \text{ は } \mathcal{P} \text{ の頂点, 辺, または面}\} \cup \{\emptyset\}$$

とおくと, Δ は 2 次元の単体的複体をなす．これを $\mathcal{P}$ の**境界複体** ($\mathcal{P}$ の [皮] の部分!) と言う．

凸多面体の境界複体を図示するには, 展開図に頂点を書き込めばよい．

注意 2. 一般に, d **次元の凸多面体の境界複体は** $(d-1)$ **次元の単体的複体になる．** また, 上の定義の状況では,

$$(f_0(\Delta), f_1(\Delta), f_2(\Delta)) = (f_0(\mathcal{P}), f_1(\mathcal{P}), f_2(\mathcal{P}))$$

である．

例 4.6. $1,2,3,4$ を頂点に持つ (正) 4 面体 $\mathcal{P}$ の境界複体は,

$$\left\{\begin{array}{l} \{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,3,4\},\{2,3,4\}, \\ \{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}, \\ \{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\emptyset \end{array}\right\}$$

であり, $f(\Delta) = (4,6,4)$ である．

問題 4.7. 次の 2 次元単体的複体 Δ の f 列及び
オイラー数 $\chi(\Delta)$ を求めよ．
ただし, $\chi(\Delta) = f_0(\Delta) - f_1(\Delta) + f_2(\Delta)$ とする．
(注) これは**トーラス**に同相 (変形できる, の意味) である．

4.3 f 列と h 列

以下では, Δ を $[n]$ を頂点集合に持つ $(d-1)$ 次元の単体的複体とする. Δ の f 列を $f(\Delta) = (f_0, f_1, \ldots, f_{d-1})$ とし, 便宜上 $f_{-1} = 1$ とおく[1].

定義 4.8. Δ の **h 列** $h(\Delta) = (h_0, h_1, \ldots, h_d)$ を次の恒等式で定める:

$$\sum_{i=0}^{d} h_i x^{d-i} = \sum_{i=0}^{d} f_{i-1}(x-1)^{d-i}.$$

例えば, $d = 3$ のとき,

$$h_0x^3 + h_1x^2 + h_2x + h_3 = f_{-1}(x-1)^3 + f_0(x-1)^2 + f_1(x-1) + f_2$$

より, $h(\Delta) = (h_0, h_1, h_2, h_3) = (1,\ f_0 - 3,\ f_1 - 2f_0 + 3,\ f_2 - f_1 + f_0 - 1)$ となる.

実は **Stanley's trick** と呼ばれる方法で,
f 列から h 列を簡単に計算することができる:

h 列を用いて前回の定理 3.3(の後半) [2]を書き直してみよう.

定理 4.9. 整数の列 (h_0, h_1, h_2, h_3) がある 3 次元 単体的 凸多面体の境界複体の h 列になるための必要充分条件は, 次の 2 条件が成り立つことである.

(1) $h_0 = h_3$, $h_1 = h_2$ (Dehn–Sommerville 方程式).

(2) $1 = h_0 \leq h_1$.

3 次元の凸多面体のオイラーの多面体公式は, 高次元の場合には次のように一般化される.

定理 4.10 (Euler–Poincaré の公式). d 次元 (単体的) 凸多面体 $\mathcal{P}$ の (境界複体 Δ の) f 列について, 次の関係式が成立する.

$$\chi(\mathcal{P}) = \chi(\Delta) := f_0 - f_1 + f_2 + \cdots + (-1)^{d-1} f_{d-1} = 1 - (-1)^d.$$

オイラー・ポアンカレの公式は h 列の言葉で書くと, $h_0 = h_d$ である. これを含む形で, 次のような関係式が常に成立する[3]. h 列を使って書くのはこの方がず〜とシンプルに書けるからである！

定理 4.11 (Dehn–Sommerville の方程式). d 次元単体的凸多面体の境界複体の h 列について, 次が成立する.

$$h_i = h_{d-i} \quad (i = 0, 1, \ldots, [d/2]).$$

---

[1]空集合の分と考えても良い. どちらにしてもこれは f 列の中には書かない.

[2]McMullen の g-theorem の高次元版で本質的な $g_i := h_i - h_{i-1}$ についての条件式は, ここにはまだ現れていない. **高次元の凸多面体の理論は 3 次元以下の理論の類推のみでは決して得られない！**

[3]その証明では, 凸多面体の境界複体が「**シャラブル**」と言う良い性質を持つことが鍵となる.