数学展望 I **第 2 回：正多面体とは何か？**

凸多面体の 1 つとして正多面体を定義し, それを分類する.
結果として 5 種類の正多面体 (プラトンの立体) が得られる.

今日のテーマ：正多面体は何種類あるのか？

1.1　凸多面体

以下では (3 次元の) 空間を $\mathbb{R}^3$ と表す.

定義 1.1. A を $\mathbb{R}^3$ の空でない部分集合とする. A の任意の 2 点を結ぶ線分が常に A に含まれるとき, A は**凸集合**であると言う.

定義 1.2. 有限集合 $X = \{p_1, \ldots, p_n\} (\subseteq \mathbb{R}^3)$ を含む最小の凸集合 $\mathcal{P}$ を X の**凸閉包**と呼び, そのような形で書ける $\mathcal{P}$ を**凸多面体** (convex polytope) という. このとき, $\mathcal{P}$ の**頂点** (vertex) は X の元からなる (全部ではないかも知れない!). 2 つの頂点を結ぶ線分を**辺** (edge), 辺で囲まれた凸多角形を**面** (face) と呼ぶ.

平面に含まれる凸多面体 $\mathcal{P}$ は**凸多角形**になる. 特に, すべての辺の長さが同じで, すべての各が等しい凸多角形を**正多角形**と呼ぶ.

以下では, 凸多面体 $\mathcal{P}$ は空間 $\mathbb{R}^3$ 内のどんな平面にも含まれないものとしよう.
有限個の凸多角形を頂点どうし, あるいは辺どうしをつなぎ合わせて得られた図形を**多面体**と言う. 凸多面体は多面体である.

定義 1.3. 凸多面体 $\mathcal{P}$ の各面が同じ正 p 角形から成り, 各頂点に同じ数 (q 本の) 辺 (または面) が集まっているとき, $\mathcal{P}$ を (p, q) **型の正多面体**と言う. 特に, 面の数が f 個の正多面体を**正 f 面体**と呼ぶ.

1.2　凸多面体のオイラー数

定義 1.4. $\mathcal{P}$ を多面体とする. $V = V(\mathcal{P})$, $E = E(\mathcal{P})$, $F = F(\mathcal{P})$ をそれぞれ $\mathcal{P}$ の頂点の数, 辺の数, 面の数とし,

$$\chi(\mathcal{P}) = V - E + F$$

を $\mathcal{P}$ の**オイラー数**と定める.

(注) オイラー数は重要なトポロジー不変量である.

定理 1.5 (オイラーの多面体公式). $\mathcal{P}$ が凸多面体ならば, $\chi(P) = V - E + F = 2$ である.

以下ではこの定理の証明のスケッチを与える.

補題. 凸多面体を膨らませれば, 球面になる. 「トポロジー」の言葉で言えば, 凸多面体は球と同相である, と言える.

凸多面体 $\mathcal{P}$ をある面の内部の点を中心に切り裂くと, **平面グラフ**が得られる. このような平面グラフは**連結** (任意の 2 点を結ぶ道が存在する) である. 凸多面体 $\mathcal{P}$ から得られた平面グラフを Γ とし, Γ の頂点数, Γ の辺の数, Γ が分ける領域の数をそれぞれ $V(\Gamma)$, $E(\Gamma)$, $F(\Gamma)$ と書くとき,

$$V(\Gamma) = V, \quad E(\Gamma) = E, \quad F(\Gamma) = F$$

である. そこで, 定理 1.5 の証明は次の定理の証明に帰着される.

定理 1.6. Γ を平面内の 連結な グラフとする. ただし, ループや複数本の辺があってもよい. このとき,

$$V(\Gamma) - E(\Gamma) + F(\Gamma) = 2$$

が成り立つ.

(辺の数 E についての数学的帰納法で証明する.)

1.3 正多面体の分類

定理 1.7. 正多面体は次の 5 種類の型に分類される:

名称	p 角形	q 本	V 頂点	E 辺	F 面
正 4 面体	3	3	4	6	4
正 6 面体	4	3	8	12	6
正 8 面体	3	4	6	12	8
正 12 面体	5	3	20	30	12
正 20 面体	3	5	12	30	20

これらは**プラトンの立体**と呼ばれるもので実現される.

(注意) 正 6 面体と正 8 面体, 正 12 面体と正 20 面体, 正 4 面体と自分自身は, それぞれ互いに**双対な関係**にある. すなわち, 面の重心を頂点として新しく凸多面体を構成すれば相手が得られる.

2 つの凸多面体 $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ が双対な関係にあるとき,

$$V(\mathcal{P}) = F(\mathcal{Q}), \quad E(\mathcal{P}) = E(\mathcal{Q}), \quad F(\mathcal{P}) = V(\mathcal{Q})$$

となる.