数学展望 I・練習問題 2

問 1 (正多面体の f 列). $\boxed{必}$ (p,q) 型の正多面体 $\mathcal{P}$ の f 列 (V,E,F) を p, q を用いて表せ.

問 2 (正多面体の実現). 次の問に答えよ.

(1) $\boxed{必}$ $\mathbb{R}^3$ 内の 2 点 $A(-1,0,0)$, $B(1,0,0)$ を考える. 点 C は xy 平面上にあるとする. 四面体 $ABCD$ が正四面体をなすような点 D の座標を決定せよ.

(2) $\boxed{必}$ 正 6 面体 $\mathcal{P}$ の頂点を $(\pm1,\pm1,\pm1)$ に取る. このとき, 各面の中心を結んでできる図形は正八面体であることを確認せよ.

問 3 (f 列). 以下で言う凸多面体はすべて 3 次元の (平面には含まれない) 凸多面体を意味する.

(1) $\boxed{必}$ n 角錐の f 列を計算せよ.

(2) $\boxed{必}$ 5 角錐からスタートして, 前ページの操作 (I),(II) を何回か繰り返せば, 頂点数が 10, 辺の数が 19, 面の数が 11 の凸多面体が構成できることを示せ.

(3) $\boxed{必}$ 頂点数が 9, 辺の数が 16, 面の数が 9 の凸多面体は存在するか.

(4) $\boxed{必}$ 頂点数が 9, 辺の数が 13, 面の数が 6 の凸多面体は存在するか.

(5) $\boxed{チ}$ 定理 3.3 の後半の主張 (単体的複体の存在条件) を証明せよ.

(6) $\boxed{チ}$ (1) で見つけた頂点数が 10, 辺の数が 19, 面の数が 11 の凸多面体について, 少なくとも 1 つの面は 5 角形であることを証明せよ.

以下は第 2 回の問題です.

問 4 (平面充填形). $\boxed{必}$ 平面充填形は 3 種類に限られることを確認せよ.

問 5 (アルキメデスの平面充填形). $\boxed{チ}$ アルキメデスの平面充填形のうち, $[3,12,12]$, $[4,6,12]$, $[4,8,8]$ の実現方法について説明せよ.

問 6 (アルキメデスの平面充填形). $\boxed{チ}$ $[p_1,p_2,p_3,p_4]=[3,3,4,12]$ とおくと,

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_3}+\frac{1}{p_4}=1$$

が成立するが, この型のアルキメデスの平面充填形は存在しないことを確認せよ.

問 7 (サッカーボール型の凸多面体). $\boxed{必}$ サッカーボール型の凸多面体の構成方法を検証し, f 列を求めよ.