数学展望 I・練習問題 1

問 1 (凸集合). $X = \{p_1, \dots, p_n\} \subseteq \mathbb{R}^3$ の各点 p_i の位置ベクトルを $\overrightarrow{p_i}$ とするとき, X を含む最小の凸集合 $\mathcal{P}$ は,

$$\mathcal{P} = \left\{ t_1\overrightarrow{p_1} + t_2\overrightarrow{p_2} + \cdots + t_n\overrightarrow{p_n} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, t_1 + \cdots + t_n = 1,\ t_1, \dots, t_n \geqq 0 \right\}$$

で与えられる．このことを確認してみよう．

(1) $\boxed{\text{必}}$ **空間内の 3 点 $\triangle ABC$ に対して, $X = \{A, B, C\}$ を含む最小の凸集合は三角形 ABC の内部および境界である**．これを確認するために, 頂点 A, B, C の位置ベクトルを $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ とする．三角形の内部または境界線上の勝手な点 P に対して, 直線 AP と辺 BC の交点を M とする．このとき, $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB} + (1-t)\overrightarrow{AC}$ $(0 \leq t \leq 1)$ と書ける．また, P は線分 AM 上にあるので, $\overrightarrow{AP} = s\overrightarrow{AM}$ $(0 \leq s \leq 1)$ と書ける．このとき,

$$\overrightarrow{OP} = t_1\overrightarrow{a} + t_2\overrightarrow{b} + t_3\overrightarrow{c}, \quad 0 \leq t_1, t_2, t_3 \leq 1, \quad t_1 + t_2 + t_3 = 1$$

となるような実数 t_1, t_2, t_3 を s, t の式で表せ.

(2) $\boxed{\text{必}}$ 上の式で与えられる $\mathcal{P}$ が凸集合であることを示せ.

(3) $\boxed{\text{確}}$ X を含む凸集合は, 上の式の右辺で与えられる集合を含むことを示せ.

(4) $\boxed{\text{確}}$ xy 平面内で正 n 角形を実現するには X をどのように選べばよいか．頂点の座標を指定せよ.

問 2 (多面体のオイラー数). 多面体 $\mathcal{P}$ のオイラー数 $\chi(\mathcal{P})$ について, 次の問に答えよ.

(1) $\boxed{\text{必}}$ 多面体 $\mathcal{P}$ の 1 つの面の重心を頂点に加え, そこからその面のすべての頂点に線分を引けば, 新しい多面体 $\mathcal{Q}$ が得られる．このとき, $\chi(\mathcal{P}) = \chi(\mathcal{Q})$ を示せ.

(2) $\boxed{\text{チ}}$ 与えられた整数 n に対して, $\chi(\mathcal{P}) = n$ となるような多面体 (平面には含まれないもの) の例を作れ.

問 3 (平面グラフ). 平面グラフに対して, 次の問いに答えよ.

(1) $\boxed{\text{必}}$ 正 4 面体から得られる平面グラフ Γ (三角形を重心細分したもの) に対して, 定理 1.6 の証明を確認せよ.

(2) $\boxed{\text{チ}}$ 連結でない平面グラフはいくつかの連結なグラフに分割される. このような場合, 定理 1.6 はどのような形に書けるだろうか.

問 4 (正多面体の分類, 双対性). 次の問いに答えよ.

(1) $\boxed{\text{必}}$ 次の関係式をみたす正の整数 $p \geq q \geq r \geq 2$ の組をすべて決定せよ:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \geqq 1.$$

(2) $\boxed{\text{必}}$ 先にあげた正多面体の双対性を確かめよ.

(3) $\boxed{\text{チ}}$ 正多面体の条件のうち, 各頂点に q 本の辺が集まるという条件を, 「各頂点の回りの面からなる角錐はすべて合同な正 q 角錐である」としたときの証明を考えよ.

(4) $\boxed{\text{チ}}$ 正 6 面体 $\mathcal{P}$ の頂点を $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ に取る. このとき,

$$\mathcal{P}^* = \left\{ \overrightarrow{v} = {}^t(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{p} \rangle \leq 1 \; (\overrightarrow{p} \in \mathcal{P}) \right\}$$

で定まる多面体は何か？　ただし, $\langle \quad , \quad \rangle$ は $\mathbb{R}^3$ における内積を表す.