3.3　双曲平面とフォードの円

ここで $\mathbf{H}$ の「合同変換」全体 $\mathrm{Isom}^+(\mathbf{H})$ の中で，$f(z)=\frac{az+b}{cz+d}$ で係数 a,b,c,d が整数となるものの集合 $G\subset \mathrm{Isom}^+(\mathbf{H})$ を考えよう．すなわち

$$G=\left\{f(z)=\frac{az+b}{cz+d}\ :\ a,b,c,d\in\mathbb{Z}, ad-bc=1\right\}$$

とおく．次の定理 3.12 はこの G に含まれる「合同変換」はフォードの円たちをフォードの円たちに写すことを主張する．この節の前半の目標はこの定理を証明することである．その前に，$f\in G$ は有理数を有理数に写すことに注意しよう．より正確には $f\in G$ が $f(z)=\frac{az+b}{cz+d}$ と表されるとき，任意の $\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}\cup\{\infty\}$ に対して

$$f\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{a\,\frac{p}{q}+b}{c\,\frac{p}{q}+d}=\frac{ap+bq}{cp+dq}\in\mathbb{Q}\cup\{\infty\}$$

が成り立つ．

定理 3.12. $f\in G$ とする．f は各フォードの円をフォードの円に写す．より正確には，任意の $\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}\cup\{\infty\}$ に対して $f(\frac{p}{q})=\frac{r}{s}\in\mathbb{Q}\cup\{\infty\}$ と書くとき

$$f\left(C\left(\frac{p}{q}\right)\right)=C\left(\frac{r}{s}\right)$$

が成り立つ．

この定理の証明のために，その特殊な場合である $\frac{p}{q}=\frac{1}{0}$ の場合だけを先に示しておこう：

補題 3.13. $f\in G$ が $f(z)=\frac{az+b}{cz+d}$ と表されるとき，$f(C(\frac{1}{0}))=C(\frac{a}{c})$ が成り立つ．

証明．$f(z)=\frac{az+b}{cz+d}=\frac{a}{c}+\frac{-1}{c^2z+cd}$ と変形できる．これを

$$z\ \xmapsto{f_1}\ c^2z\ \xmapsto{f_2}\ c^2z+d\ \xmapsto{f_3}\ \frac{-1}{c^2z+d}\ \xmapsto{f_4}\ \frac{-1}{c^2z+d}+\frac{a}{c}$$

と見ることで $f(z)=f_4\circ f_3\circ f_2\circ f_1(z)$ と表すことができる．ここで

$$f_1(z)=c^2z,\quad f_2(z)=z+d,\quad f_3(z)=-\frac{1}{z},\quad f_4(z)=z+\frac{a}{c}$$

である．

ては$C(\frac{1}{0})$の$f = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$による像を考えよう．$C(\frac{1}{0})$は直線$y = 1$であり，この直線は$f_1(z) = c^2 z$によって直線$y = c^2$に写る．この直線は$f_2(z) = z + d$では同じ直線に写される．次に$f_3(z) = -\frac{1}{z}$によって，直線$y = c^2$は中心が$(0, \frac{1}{c^2})$で半径が$\frac{1}{c^2}$の円に写る．この円は，最後に$f_4(z) = z + \frac{a}{c}$によって円$C(\frac{a}{c})$に写る．以上より$f(C(\frac{1}{0})) = C(\frac{a}{c})$が示された． □

次に補題3.13を用いて定理3.12を証明しよう．

定理*3.12*の証明．$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $f(\frac{1}{0}) = \frac{r}{s}$とする．いま整数$l, m$で$pm - lq = 1$を満たすものをとる．(このような$l, m$の組はたくさん存在する．実際，有理数$\frac{l}{m} < \frac{p}{q}$で$C(\frac{l}{m})$と$C(\frac{p}{q})$が接するものを考えればよい．) このとき

$$g(z) = \frac{pz + l}{qz + m}$$

を考えるとこれもGの元である．従って補題3.12を適用すると$g(\frac{1}{0}) = \frac{p}{q}$より$g(C(\frac{1}{0})) = C(\frac{p}{q}) \cdots (*)$が成り立つ．

一方で$f \circ g$もGの元であるので（下の問題参照），これにも補題3.13を適用すると，$f \circ g(\frac{1}{0}) = f(\frac{p}{q}) = \frac{r}{s}$より$f \circ g(C(\frac{1}{0})) = C(\frac{r}{s})$が成り立つ．従って

$$C\left(\frac{r}{s}\right) = f \circ g\left(C\left(\frac{1}{0}\right)\right) = f\left(g\left(C\left(\frac{1}{0}\right)\right)\right) = f\left(C\left(\frac{p}{q}\right)\right)$$

となることがわかる．ただし最後の等号で$(*)$を用いた． □

問題 3.14. $f, g \in G$に対して$f \circ g \in G$を示せ．

系 3.15. 任意の*2*つのフォードの円は双曲平面の中で「合同」である．すなわち任意の$\frac{p}{q}, \frac{r}{s} \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$に対して$C(\frac{p}{q})$を$C(\frac{r}{s})$に写すような「合同変換」$f \in G$が存在する．

証明．定理3.12の証明と同じ議論より，ある$g, h \in G$で$g(\frac{1}{0}) = \frac{p}{q}$と$h(\frac{1}{0}) = \frac{r}{s}$を満たすものが取れる．ここで$g$の逆写像$g^{-1}$も$G$の元であることがわかり，上の問題より$h \circ g^{-1} \in G$もわかる．ここで$f = h \circ g^{-1}$とおけば，$f(\frac{p}{q}) = \frac{r}{s}$なので$f\left(C\left(\frac{p}{q}\right)\right) = C\left(\frac{r}{s}\right)$がいえる． □

この系から，任意の2つのフォードの円は双曲幾何においては対等な立場にあることがわかる．より専門的な双曲幾何の言葉で述べると，双曲曲面 $\mathbf{H}/G$ のカスプにおける最大のホロサークル近傍の $\mathbf{H}$ への持ち上げがフォードの円たちの集合になっている．

黄金比と合同変換

ここでは黄金比の収束分数列に対応するフォードの円たちが，$\mathbf{H}$ のある「合同変換」によってスライドしていく様子を説明しよう．

黄金比 $\tau = [1, 1, \ldots] = 1 + \frac{1}{\tau}$ であった．このことから

$$f(z) = 1 + \frac{1}{z} = \frac{z+1}{z}$$

という写像を考えてみるのは自然だが，残念ながら f は G の元ではないことがわかる．しかし，さらに

$$f(z) = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{z}} = \frac{2z+1}{z+1}$$

を考えてみると今度は G の元であることがわかる．

この写像 $f(z) = \frac{2z+1}{z+1}$ と τ の収束分数列に対応するフォードの円の関係をみてみよう．以下の議論は図3.8を参照して欲しい．まず，作り方から $f(\tau) = \tau$ であることがわかる．ほかにも $f(z) = z$ を満たす複素数 z があるか探してみよう．$f(z) = \frac{2z+1}{z+1} = z$ すなわち $z^2 - z - 1 = 0$ の解は $z = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ なので，$\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 以外に τ の共役解 $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ も写像 f の固定点であることがわかった．さらに，2点 $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ を端点に持つ $\mathbf{H}$ の「直線」を L とすると，$f(L) = L$ であることがわかる．

次に f によって τ の収束分数列 $\alpha_n = [\overbrace{1, 1, \ldots, 1}^{n+1}] = \frac{p_n}{q_n}$ がどのように写されるかを考える．$f(z)$ の形より $f(\alpha_n) = \alpha_{n+2}$ が $n \geq -1$ で成り立つことがわかる．従って定理3.12より $f(C(\alpha_n)) = C(\alpha_{n+2})$ もいえる．さらに，直線 L は C_0, C_1 の接点と C_1, C_2 の接点を通ることが確かめられる．従って L 上に C_i, C_{i+1} $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ の接点が乗っていて，f によって C_i, C_{i+1} の接点が C_{i+2}, C_{i+3} の接点に写されることがわかる．これらの状況をデフォルメして表現したのが図3.9である．この図において f の作用は平行移動となっている．

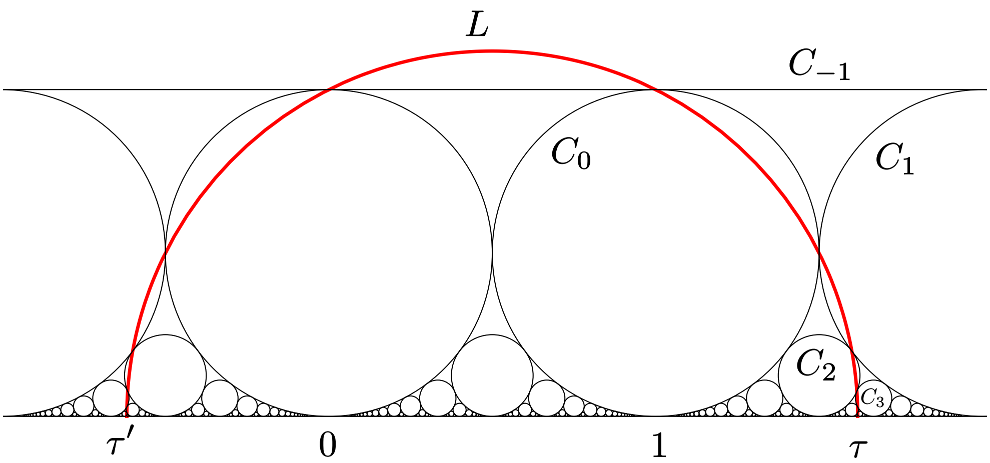

図 3.8: 区間 $[-1, 2]$ に含まれる有理数のフォードの円と半円 L

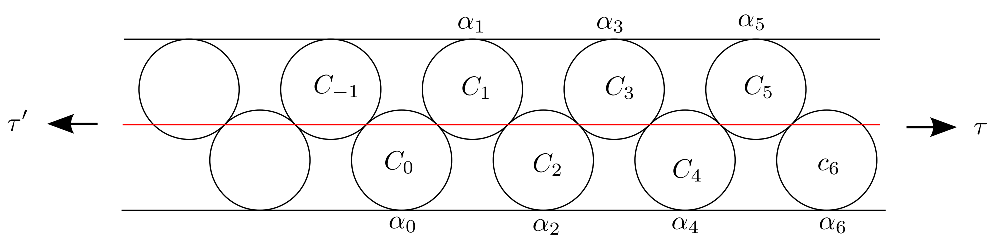

図 3.9: 図 3.8 をデフォルメしたもの

関連図書

[1] 高木貞治「初等整数論講義」共立出版

[2] 芹沢正三「数論入門」講談社ブルーバックス

[3] R. A. ダンラップ「黄金比とフィボナッチ数」日本評論社

[4] 阿原一志「ハイプレイン　のりとはさみでつくる双曲平面」日本評論社

[5] 寺坂英孝「非ユークリッド幾何の世界」講談社ブルーバックス

[6] 小林昭七「ユークリッド幾何から現代幾何へ」日本評論社

[7] T. ニーダム「ヴィジュアル複素解析」培風館

[8] F. Bonahon, *Low-Dimensional Geometry*, American Mathematical Society.

[9] L. R. Ford, *Fractions*, The American Mathematical Monthly 45 (1938), no. 9, 586–601. `http://www.maths.ed.ac.uk/~aar/papers/ford.pdf` からフリーダウンロード可.

[10] I. Short, *Ford circles, continued fractions and rational approximation*, The American Mathematical.Monthly 118 (2011), no. 2, 130–135.