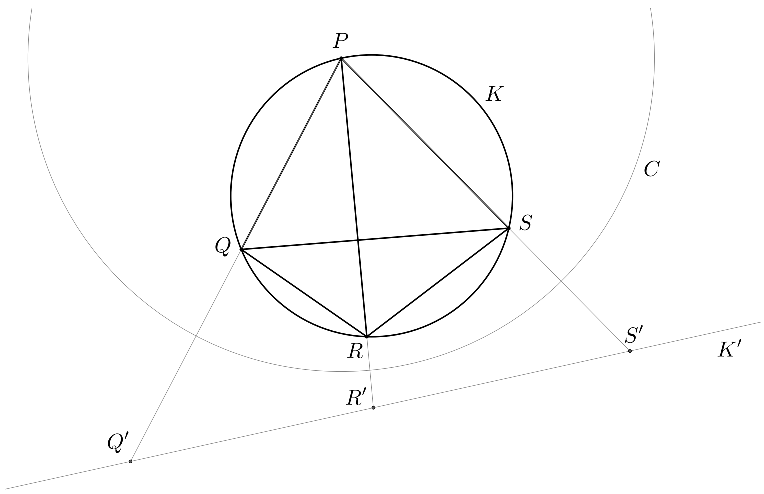

図 3.5: トレミーの定理

3.2　双曲平面

ユークリッド幾何

まずユークリッド幾何の復習から始める．ユークリッド幾何とは次の５つの公理を認めてそこから展開される幾何学である．([6] に詳しい解説があるので参考にして欲しい．)

(1) 異なる 2 点 A, B を結ぶ線分がただ一つ存在する．

(2) 線分は両端からいくらでも伸ばせる．

(3) 異なる 2 点 A, B に対して A を中心として B を通る円がただ一つ存在する．

(4) 直角は全て等しい．

(5) 直線 L と L 上にはない点 A に対して A を通り L と交わらない直線が**ただ一つ**存在する．

この公理 (5) を天下り的に認めるのではなく，他の公理 (1)–(4) から導こうとする試みが歴史上数多くなされてきた．それらがすべてが失敗に終わった経験から，１７世紀初頭にはガウス，ボヤーイ，ロバチェフスキーがそれぞれ独立に，公理 (5) を仮定しなくても成り立つ幾何学の存在を認識するようになっ

た．それが非ユークリッド幾何，すなわち双曲幾何である．実際，この双曲幾何は「“直線”L と L 上にはない点 A に対して A を通り L と交わらない “直線” が無数に存在する」ような幾何学である．

この双曲幾何を円に関する反転を用いて導入したいのであるが，そのために，まず平面 $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ におけるユークリッド幾何の**合同変換**が平面の直線に関する反転を用いて記述できることを確認しておこう．以下で合同変換とは向きを保つ等長変換のことを意味する．等長変換とは勝手な 2 点の距離を不変にするような平面から平面への写像のことである．例えば直線に関する反転は等長変換であるが向きを反転させるので合同変換とは呼ばないことにする．ちなみに平面において「向き」を気にするときは魚の絵を描くとよい．さて，平面の合同変換は回転および平行移動で表される．すなわち平面 $\mathbb{R}^2$ を複素平面 $\mathbb{C}$ と同一視するとき，$\mathbb{C}$ の合同変換 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ は

$$f(z) = \alpha z + \beta \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{C},\ |\alpha| = 1)$$

の形で表すことができる．従って，平面 $\mathbb{R}^2$ の合同変換全体の集合を $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^2)$ と表すことにすると

$$\mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^2) = \{f(z) = \alpha z + \beta : \alpha, \beta \in \mathbb{C}, |\alpha| = 1\}$$

が成り立つ．

ここで，平面の合同変換を直線に関する反転を用いて表すことを考えよう．

L, L' を直線とし，これらに関する反転の合成 $\phi_L \circ \phi_{L'}$ を考えると，L, L' が平行ならばは平行移動となり，L と L' が平行でない場合は L, L' の交点を中心とする回転となる（図 3.6）．従って，2 直線 L, L' に関して $\phi_L \circ \phi_{L'}$ は平面の合同変換となる．逆に任意の合同変換はある 2 直線 L, L' を用いて $\phi_L \circ \phi_{L'}$ と表すことができる：

補題 3.8. 次が成り立つ：

$$\mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^2) = \{\phi_L \circ \phi_{L'} : L,\ L' \text{は}\ \mathbb{R}^2 \text{の直線}\}$$

証明. $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^2)$ の元 f が $f(z) = \alpha z + \beta$ と表されるとする．ここで $\alpha = 1$ のときは $f(z) = z + \beta$ は平行移動であるから，$\phi_L \circ \phi_{L'}$ がこの平行移動となるような L, L' を見つけることは容易である．一方で $\alpha \neq 1$ のときは f は固定点 $z = \frac{\beta}{1-\alpha}$ と持ち，この点中心の回転を表す．この場合も $\phi_L \circ \phi_{L'}$ がこの回転となるような L, L' を見つけることができる． $\square$

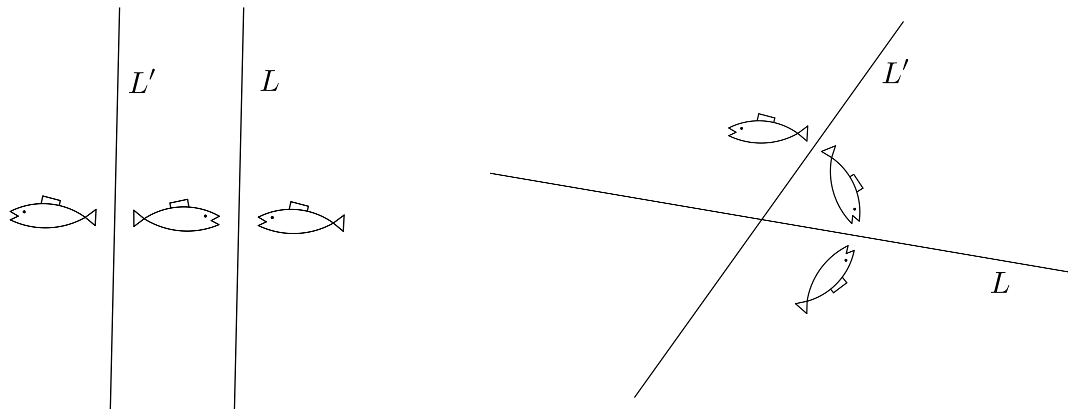

図 3.6: 直線に関する反転の合成．平行移動（左）と回転（右）

双曲幾何（上半平面モデル）

上半平面を

$$\mathbf{H} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R},\ y > 0\}$$

と表す．以下ではこの $\mathbf{H}$ において公理 (5) を仮定しない幾何学を展開したい．そこで，ユークリッド幾何においては合同変換が直線に関する反転で表せたことを参考にして，その逆に，まず $\mathbf{H}$ の「直線」を定めて，その「直線」に関する反転で写り合うものが $\mathbf{H}$ において「合同」であるとみなすような幾何を考えよう．そこで天下り的であるが次の２つの約束をする．

約束１ $\mathbf{H}$ における「直線」とは x 軸に直交する半円もしくは x 軸に直交する半直線のことと約束する．
約束２ $\mathbf{H}$ における「合同変換」全体の集合を次のように約束する：

$$\mathrm{Isom}^{+}(\mathbf{H}) = \{\phi_L \circ \phi_{L'} : L,\ L' \text{は}\ \mathbf{H}\ \text{の「直線」}\}$$

このとき $\mathbf{H}$ の平行線は沢山あるし，三角形の内角の和は 180° 未満となることがわかる．(ただし $\mathbf{H}$ における角度は平面における角度と同じものとする．)

では $\mathbf{H}$ の「合同変換」とは具体的にはどのようなものであろうか？図 3.7 には $\mathbf{H}$ の「直線」L, L' が交わらない場合と交わる場合の $\phi_L \circ \phi_{L'}$ の様子が図示してある．

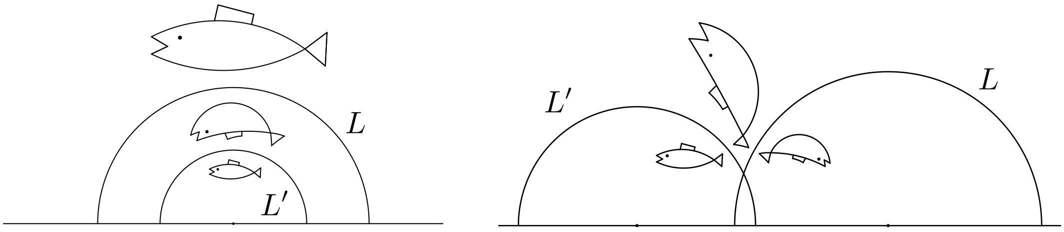

図 3.7: $\mathbf{H}$ における「直線」L, L' に関する反転の合成. L, L' が交わらない場合 (左) と交わる場合 (右)

$\mathbf{H}$ の「合同変換」を数式を用いてもう少し正確に説明しよう．そのために上半平面 $\mathbf{H}$ を複素平面 $\mathbb{C}$ の部分集合とみなす：

$$\mathbf{H} = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : y > 0\}.$$

以下では複素数 $z = x + iy$ の実部 x を $\mathrm{Re}(z)$, 虚部 y を $\mathrm{Im}(z)$ と表す．さて，$\mathbf{H}$ の「直線」L は x 軸に直交する直線の場合は実数 a を用いて $\mathrm{Re}(z) = a$ と表せて,「直線」L が中心 $a \in \mathbb{R}$, 半径 $r > 0$ の半円のときは $|z - a| = r$ と表せることに注意する．このとき次は容易に確認できる．

補題 3.9. *(1)* $\mathrm{Re}(z) = a$ と表される $\mathbf{H}$ の「直線」L に対して

$$\phi_L(z) = -\overline{z} + 2a$$

が成り立つ.

(2) $|z - a| = r$ と表される $\mathbf{H}$ の「直線」L に対して

$$\phi_L(z) = \frac{r^2}{\overline{z} - a} + a$$

が成り立つ.

問題 3.10. この補題を示せ.

この補題を用いて，２つの「直線」に関する反転の合成としての「合同変換」の例を幾つか計算しよう.

例 1　L, L' が共に x 軸に垂直な直線の場合．$L:\ \mathrm{Re}(z) = a$ と $L':\ \mathrm{Re}(z) = 0$ に対して $\phi_L(z) = -\overline{z} + 2a$, $\phi_{L'}(z) = -\overline{z}$ なので

$$\phi_L \circ \phi_{L'}(z) = z + 2a$$

という水平方向に $2a$ の平行移動となる．

例 2　L, L' が共に原点中心の半円の場合．$L:\ |z| = r$ と $L':\ |z| = 1$ に対して $\phi_L(z) = \frac{r^2}{\overline{z}}$, $\phi_{L'}(z) = \frac{1}{\overline{z}}$ なので

$$\phi_L \circ \phi_{L'}(z) = r^2 z$$

という原点中心拡大率 r^2 の拡大となる．

例 3　L が虚軸で，L' が原点中心の半円の場合．$L:\ \mathrm{Re}(z) = 0$ と $L':\ |z| = 1$ に対して $\phi_L(z) = -\overline{z}$, $\phi_{L'}(z) = \frac{1}{\overline{z}}$ なので

$$\phi_L \circ \phi_{L'}(z) = -\frac{1}{z}$$

となる．これは $z = i$ を固定して，i 中心の角度 π の「回転」である．

　さて，補題 3.9 を用いると任意の $\mathrm{Isom}^+(\mathbf{H})$ の元 $\phi_L \circ \phi_{L'}$ は

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad - bc > 0$$

の形に書けることが容易にわかる．実際に上の 3 つの例は全てこのように書けている．さらに分母分子に同じ正の実数をかけることで $ad - bc = 1$ が成り立つと仮定してもよい．実際，$\lambda > 0$ に対して

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{\lambda az + \lambda b}{\lambda cz + \lambda d}$$

であり，$(\lambda a)(\lambda d) - (\lambda b)(\lambda c) = \lambda^2(ad - bc)$ なので $\lambda = 1/\sqrt{ad - bc}$ とすればよい．実はここまで述べたことの逆も成り立つのである．すなわち，任意の

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad - bc = 1$$

は，$\mathbf{H}$ のある「直線」L, L' を用いて $\phi_L \circ \phi_{L'}$ の形に書くことができるのである．このことは 2 行 2 列行列の標準形の理論を用いると説明ができるのであるが，ここでは証明せずに認めることとする．以上のことをまとめると次のようになる：

定理 3.11. $\mathbf{H}$ の「合同変換」全体の集合 $\mathrm{Isom}^+(\mathbf{H})$ は

$$\mathrm{Isom}^+(\mathbf{H}) = \left\{ f(z) = \frac{az+b}{cz+d} : a,b,c,d \in \mathbb{R},\ ad-bc=1 \right\}$$

と表すことができる．

この事実はユークリッド空間の合同変換全体の集合が

$$\mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^2) = \{ f(z) = \alpha z + \beta : \alpha, \beta \in \mathbb{C},\ |\alpha| = 1 \}$$

と表せることが対応している．ここで $\mathrm{Isom}^+(\mathbf{H})$ を表す実数 a,b,c,d の組と，$\mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^2)$ を表す複素数 α, β の組は，どちらも実質的に実 3 次元分の自由度があることに注意しよう．

さて，$\mathbf{H}$ の「合同変換」$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ は $\mathbf{H} \subset \mathbb{C}$ から自分自身への写像であるが，もちろん任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して値 $\frac{az+b}{cz+d}$ が定まる．さらに $z = \infty$ のときも，円に関する反転での ∞ の像の約束を適用すれば値 $f(\infty)$ が定まる．このとき，$z \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ に関して $f(z) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ となることは明らかであろう．ここで 1.3 節の記号を用いれば

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} z$$

と書けることに注意する．