第3章　双曲幾何

ここでは円に関する反転を用いて双曲幾何を導入する．その後，フォードの円が双曲幾何の観点からみると自然な対象であることを説明する．

この章の参考書として，円に関する反転と双曲幾何の関係については [7] が，ユークリッド幾何から双曲幾何への歴史的・数学的背景については [6] が優れている．その他に [4], [5] も参考になる．

3.1　円に関するの反転

平面を $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ と表す．平面上の直線 L に関する反転写像（鏡映写像）を

$$\phi_L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

と表す．すなわち平面の任意の点 P に対して $P' = \phi_L(P)$ とすると，直線 L は線分 PP' の垂直２等分線になっている．このとき $\phi_L \circ \phi_L$ は恒等写像であり，P が L 上にあれば $\phi_L(P) = P$ が成り立つことに注意する．

次に，平面上の円 C（中心 O, 半径 r）が与えられたとき，円 C に関する反転写像

$$\phi_C : \mathbb{R}^2 - \{O\} \to \mathbb{R}^2 - \{O\}$$

を同様に定義しよう．すなわち，平面上の点 P $(\neq O)$ に対して $P' = \phi_C(P)$ を次の性質 (1), (2) を満たすように取る（図 3.1 参照）：

(1) P' は，O を始点として P を通る半直線上にある．

(2) $|OP| : r = r : |OP'|$ を満たす．

直線の場合と同様に $\phi_C \circ \phi_C$ は恒等写像であり，P が C 上にあるときは $\phi_C(P) = P$ が成り立つ．以下では $\phi_C(O) = \infty$, $\phi_C(\infty) = O$ と約束する．また，特に断らない限り点 $P, Q, \ldots$ の像 $\phi_C(P), \phi_C(Q), \ldots$ を $P', Q', \ldots$ と表す．

問題 3.1. (1) C が単位円 $x^2 + y^2 = 1$ のとき $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, $(u, v) \neq (0, 0)$ $\phi_C(u, v) = \left(\frac{u}{u^2+v^2}, \frac{v}{u^2+v^2}\right)$ となることを示せ．

(2) (1) と同じ事を複素数を用いて考えよ．すなわち C が単位円 $|z| = 1$ のとき $w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$ に対して $\phi_C(w) = \dfrac{1}{\bar{w}}$ となることを示せ．

定理 3.2. 円 C の中心を O とする．$P, Q \in \mathbb{R}^2 - \{O\}$ に対して $P' = \phi_C(P)$, $Q' = \phi_C(Q)$ とするとき，$\triangle OPQ$ と $\triangle OQ'P'$ は相似であり，その相似比は $\frac{|P'Q'|}{|PQ|} = \frac{r^2}{|OP||OQ|}$ となる．

証明. $|OP|\,|OP'| = r^2$ と $|OQ|\,|OQ'| = r^2$ より

$$|OP'| : |OQ'| = \frac{r^2}{|OP|} : \frac{r^2}{|OQ|} = |OQ| : |OP|$$

が成り立つので $\triangle OPQ$ と $\triangle OQ'P'$ は相似である．さらに相似比は

$$\frac{|P'Q'|}{|PQ|} = \frac{|OQ'|}{|OP|} = \frac{r^2}{|OP||OQ|}$$

となる． □

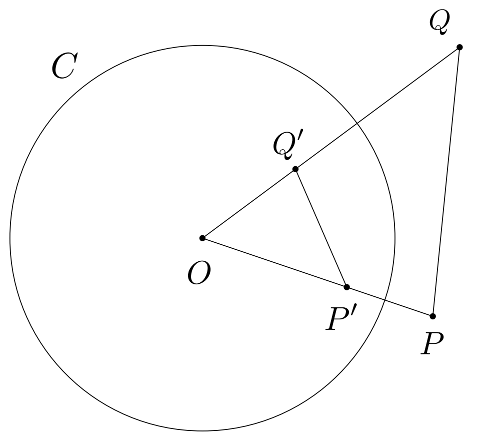

図 3.1: $\triangle OPQ$ と $\triangle OQ'P'$ は相似

次に平面上の直線や円が，円 C の反転 ϕ_C によって写される像を考えよう．

定理 3.3 (直線の像). *(1)* 直線 L が円 C の中心 O を通るとき，$\phi_C(L) = L$ が成り立つ.

(2) 直線 L が円 C の中心 O を通らないとき，$\phi_C(L)$ は O を通る円となる.

証明. (1) は明らかである. (2) 点 O から直線 L へ下ろした垂線の足を P とおく. 直線 L 上の任意の点 $Q(\neq P)$ に対して $\triangle OPQ$ と $\triangle OQ'P'$ が相似なので角 $OQ'P'$ は直角となる. 従って $\phi_C(L)$ は OP' を直径とする円である（図 3.2 参照）. □

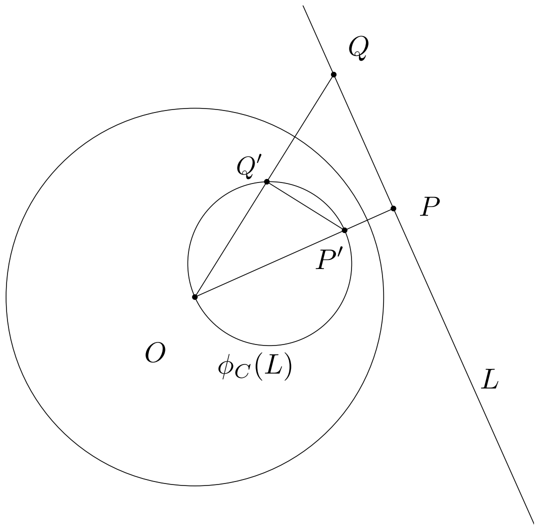

図 3.2: 直線 L の像 $\phi_C(L)$ は円

定理 3.4 (円の像). *(1)* 円 K が円 C の中心 O を通るとき，$\phi_C(K)$ は直線となる.

(2) 円 K が円 C の中心 O を通らないとき，$\phi_C(K)$ は円となる.

証明. (1) 定理 3.3 (2) の証明を逆にたどればよい. (2) は演習問題とする. □

問題 3.5. 定理 3.4 (2) を図 3.3 を参考に示してみよ.

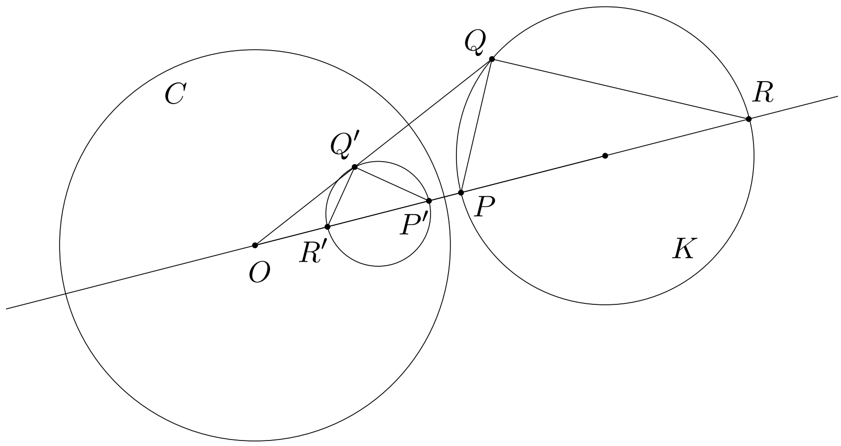

図 3.3: 円 K の像 $\phi_C(K)$ は円

以上より ϕ_C は「円または直線」を「円または直線」に写すことがわかった．ここで，直線も（∞ を通る）特殊な円だと思うことにすれば，ϕ_C は円を円に写すということができる．

定理 3.6. 円 C と円 K が直交するならば $\phi_C(K) = K$ が成り立つ．

証明. 図 3.4 のように点 P, Q, R, S を取る．直線 OP が円 K の接線となるので $\angle OPS = \angle ORP$ となる．従って $\triangle ORP$ と $\triangle OPS$ は相似となり $S = \phi_C(R)$ がわかる．いま $\phi_C(K)$ は $P, Q, R \in K$ の ϕ_C による像を通る円として特徴付けられるので，$\phi_C(P) = P$, $\phi_C(Q) = Q$ と $\phi_C(R) = S$ より $\phi_C(K) = K$ がわかる． □

注. 定理 3.4 (2) では円 C の反転写像 ϕ_C によって，円 K はある円 K' に写されることを示したが，必ずしも K の中心が K' の中心に写されるわけではない．実際，例えば定理 3.5 の状況において $\phi_C(K) = K$ であるが，K の中心は円 C の外側にあり ϕ_C によって C の内側に写されている．

ここで一つ応用例を挙げよう．

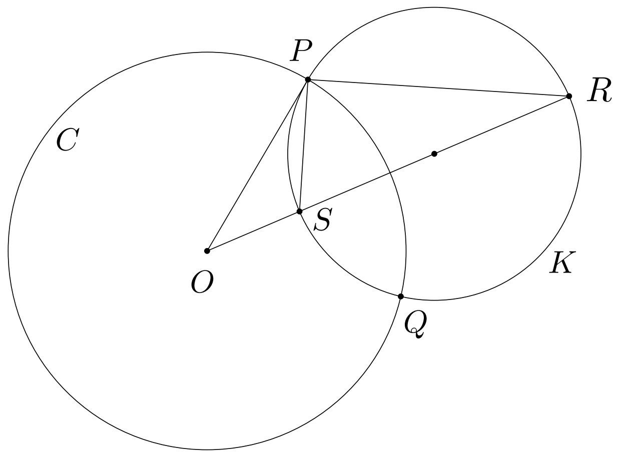

図 3.4: 定理 3.6 の説明

定理 3.7 (トレミーの定理)**.** 同一円周 K 上にある 4 点 P, Q, R, S に対して

$$|PQ||RS| + |PS||QR| = |PR||QS|$$

が成り立つ（図 *3.5*）.

証明. 4 点 P, Q, R, S が乗っている円を K とする．いま点 P 中心の円 C を 1 つ取り，この円 C で反転することで K は直線 K' に写される．ここで $\triangle PQR$ と $\triangle PR'Q'$ は相似で相似比は $\frac{|Q'R'|}{|QR|} = \frac{r^2}{|PQ||PR|}$ となる．同様に $\frac{|R'S'|}{|RS|} = \frac{r^2}{|PR||PS|}$ と $\frac{|Q'S'|}{|QS|} = \frac{r^2}{|PQ||PS|}$ を得る．これらを $|Q'R'| + |R'S'| = |Q'S'|$ に代入すると

$$\frac{r^2}{|PQ||PR|} + \frac{r^2}{|PR||PS|} = \frac{r^2}{|PQ||PS|}$$

となり，これを整理して $|PQ||RS| + |PS||QR| = |PR||QS|$ を得る． □

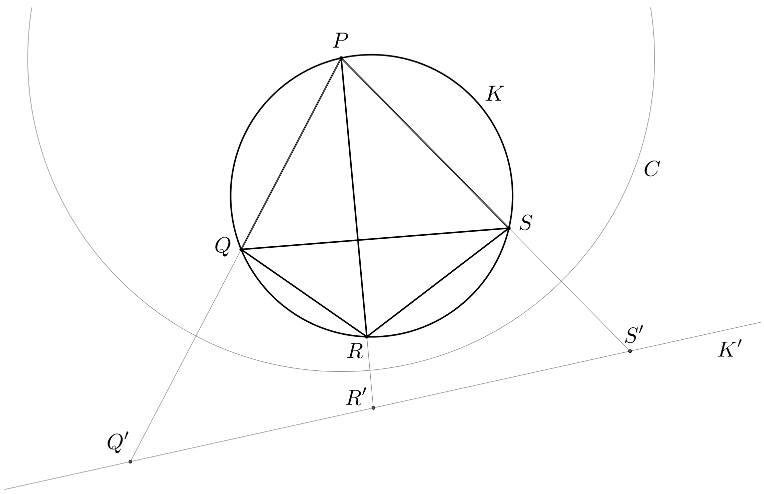

図 3.5: トレミーの定理

3.2 双曲平面

ユークリッド幾何

まずユークリッド幾何の復習から始める．ユークリッド幾何とは次の５つの公理を認めてそこから展開される幾何学である．([6] に詳しい解説があるので参考にして欲しい.)

(1) 異なる 2 点 A, B を結ぶ線分がただ一つ存在する．

(2) 線分は両端からいくらでも伸ばせる．

(3) 異なる 2 点 A, B に対して A を中心として B を通る円がただ一つ存在する．

(4) 直角は全て等しい.

(5) 直線 L と L 上にはない点 A に対して A を通り L と交わらない直線が**ただ一つ**存在する．

この公理 (5) を天下り的に認めるのではなく，他の公理 (1)–(4) から導こうとする試みが歴史上数多くなされてきた．それらがすべてが失敗に終わった経験から，１７世紀初頭にはガウス，ボヤーイ，ロバチェフスキーがそれぞれ独立に，公理 (5) を仮定しなくても成り立つ幾何学の存在を認識するようになっ