2.3 フルビッツの定理

定理 2.11 より，任意の無理数 ω に対してその収束分数列を $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ とすれば各 n に対して $G_\omega(\alpha_n) < \frac{1}{2}$ か $G_\omega(\alpha_{n+1}) < \frac{1}{2}$ が成立するのであった．このことから「任意の無理数 ω に対して $G_\omega(\frac{p}{q}) < \frac{1}{2}$ を満たす有理数 $\frac{p}{q}$ は無限個存在する」ということがわかる．では，与えられた実数 $A > 0$ に対して，次の命題 $(\sharp)$ が成り立つかどうかを考えてみよう：

$(\sharp)$ 任意の無理数 ω に対して $G_\omega(\frac{p}{q}) < A$ を満たす有理数 $\frac{p}{q}$ が無限個存在する．

もちろん A が大きいほどこの命題 $(\sharp)$ は成立しやすくなる．$A = \frac{1}{2}$ ならば $(\sharp)$ は成立したので任意の $A \geq \frac{1}{2}$ に対してはやはり成立する．従って $(\sharp)$ が成立するような A がどこまで小さく取れるかが問題となる．答えをいえば $A \geq \frac{1}{\sqrt{5}}$ ならば $(\sharp)$ は成立し，$A < \frac{1}{\sqrt{5}}$ ならば $(\sharp)$ は成立しないのである．証明が難しいのは「$A \geq \frac{1}{\sqrt{5}}$ ならば $(\sharp)$ は成立する」という部分で，これはフルビッツの定理と呼ばれている．

定理 2.14 (フルビッツ)**.** 任意の無理数 ω に対して

$$G_\omega\left(\frac{p}{q}\right) < \frac{1}{\sqrt{5}}$$

を満たす有理数 $\frac{p}{q}$ は無限個存在する．

Ford は解説論文 [9] において，この定理のフォードの円を用いた幾何的な別証明を与えている．この節の目標はこの証明を解説することである．

その前に「$A \leq \frac{1}{\sqrt{5}}$ ならば $(\sharp)$ は成立しない」ことを見ておこう．実際，$\omega = \tau$ のときに $(\sharp)$ が成り立たなくなるのである．すなわち次の定理が成り立つ．

定理 2.15. $A < \frac{1}{\sqrt{5}}$ と黄金比 τ に対して

$$G_\tau\left(\frac{p}{q}\right) < A$$

を満たす有理数 $\frac{p}{q}$ は高々有限個である．

この定理は次の補題から直ちに従う．

補題 2.16. 黄金比 τ の収束分数列を $\{\frac{p_n}{q_n}\}_{n=0}^{\infty}$ とするとき

$$\lim_{n\to\infty} G_\tau\left(\frac{p_n}{q_n}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

が成り立つ（図 *2.14* 参照）．

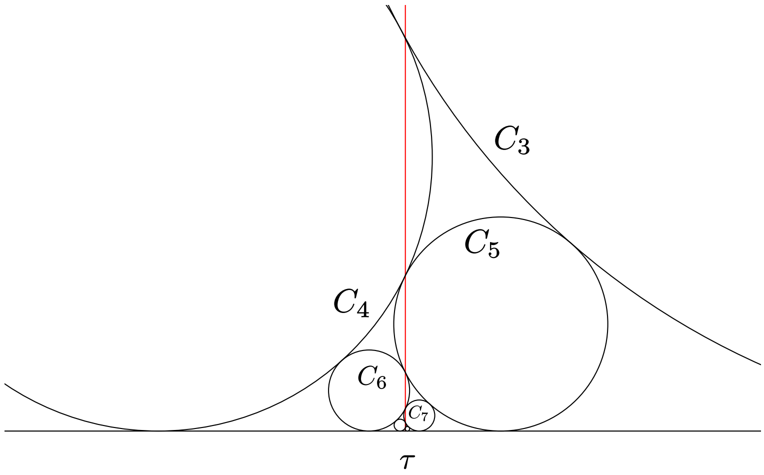

図 2.14: $C_n = C(\frac{p_n}{q_n})$ $(n = 3, \ldots, 9)$ と L_τ（赤）

補題 2.16 の証明. $\tau = [1, 1, 1, \ldots] = [\overbrace{1, \ldots, 1}^{n}, \tau]$ に補題 1.9 を適用すると

$$\tau = \frac{p_n\tau + p_{n-1}}{q_n\tau + q_{n-1}}$$

が成り立つ．このとき

$$G_\tau\left(\frac{p_n}{q_n}\right) = q_n^2\left|\tau - \frac{p_n}{q_n}\right| = q_n^2\left|\frac{p_n\tau + p_{n-1}}{q_n\tau + q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n}\right| = \frac{1}{\left|\tau + \frac{q_{n-1}}{q_n}\right|}$$

となる．ここで $q_n = p_{n-1}$ より

$$\tau + \frac{q_{n-1}}{q_n} = \tau + \frac{q_{n-1}}{p_{n-1}} \quad \xrightarrow[n\to\infty]{} \quad \tau + \frac{1}{\tau} = \sqrt{5}$$

となるので主張を得る． □

定理 *2.15* の証明. いま $\frac{p}{q}$ が $G_\tau\left(\frac{p}{q}\right) < A < \frac{1}{\sqrt{5}}$ を満たすとする．このとき，特に $G_\tau\left(\frac{p}{q}\right) < \frac{1}{2}$ なので定理 2.12 より $\frac{p}{q}$ は τ の収束分数であることがわかる．ここで補題 2.16 から $G_\tau\left(\frac{p}{q}\right) < A$ を満たす収束分数 $\frac{p}{q} = \frac{p_n}{q_n}$ はたかだか有限個なので主張を得る． □

フルビッツの定理（定理 2.14）の証明に戻ろう．命題 ($\sharp$) が $A = \frac{1}{2}$ で成り立つことの証明は，連続する 2 つの収束分数 α_n, α_{n+1} について考えることで得られた．$A = \frac{1}{\sqrt{5}}$ の場合のフルビッツの定理は連続する 3 つの収束分数 $\alpha_n, \alpha_{n+1}, \alpha_{n+2}$ について考えることで得られる．まず定理の証明に必要な補題を 3 つ準備する．

補題 2.17. 半径 $r_1 \geq r_2 > 0$ の円 K_1, K_2 が図 *2.15* のような配置にあるとする．特に K_1, K_2 の中心を結ぶ線分と x 軸とのなす角を $\theta > 0$ とする．ここで $\lambda = \sqrt{\frac{r_1}{r_2}}$ とおくとき次が成り立つ：

(1) $\sin\theta = \frac{\lambda^2-1}{\lambda^2+1}, \ \cos\theta = \frac{2\lambda}{\lambda^2+1}, \ \tan\theta = \frac{\lambda^2-1}{2\lambda}.$

(2) $\tan\theta \lesseqqgtr \frac{1}{2} \iff \lambda \lesseqqgtr \tau$（複合同順）

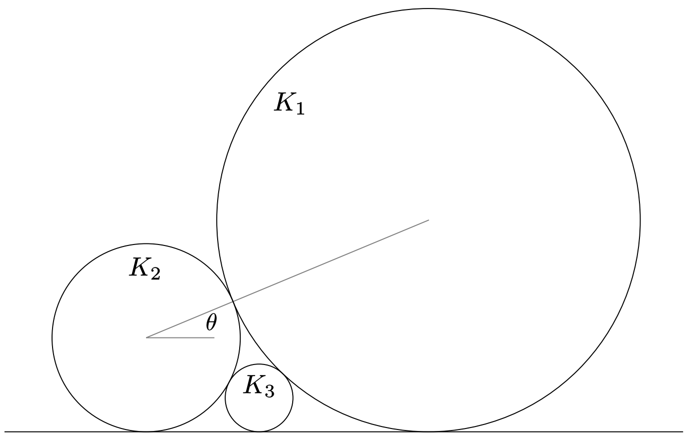

図 2.15: 補題 2.17 と補題 2.18 の設定

問題 2.18. この補題を証明せよ．

補題 2.19. 半径 $r_1 \geq r_2 > r_3 > 0$ の円 K_1, K_2, K_3 が図 *2.15* のような配置にあるとする.

(1) $\frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}} = \frac{1}{\sqrt{r_3}}$ が成り立つ.

(2) $\lambda = \sqrt{\frac{r_1}{r_2}}$, $\mu = \sqrt{\frac{r_2}{r_3}}$ と置くとき $\mu = 1 + \frac{1}{\lambda}$ が成り立つ.

(3) $\lambda \lesseqqgtr \tau \iff \mu \gtreqqless \tau$ が成り立つ.

問題 2.20. この補題を証明せよ.

補題 2.21. 隣接する有理数 $\frac{p}{q}, \frac{r}{s}$ に対して，フォードの円 $C(\frac{p}{q})$,$C(\frac{r}{s})$ の中心を結ぶ線分と x 軸のなす角を $\theta > 0$ とする．このとき $\frac{p}{q}, \frac{r}{s}$ の間に存在する無理数 ω に対して

$$G_\omega\left(\frac{p}{q}\right) < \frac{\cos\theta}{2} \quad \text{または} \quad G_\omega\left(\frac{r}{s}\right) < \frac{\cos\theta}{2}$$

のどちらか一方が成り立つ.

証明. $\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$ として一般性を失わない．$C(\frac{p}{q})$ と $C(\frac{r}{s})$ の接点から x 軸に下ろした垂線の足を M とする．このとき $|M - \frac{p}{q}| = \frac{\cos\theta}{2q^2}$ と $|M - \frac{r}{s}| = \frac{\cos\theta}{2s^2}$ が成り立つ．さて，M は有理数であることが容易に確認できるので，$\frac{p}{q} < \omega < M$ または $M < \omega < \frac{r}{s}$ が成り立つ．$\frac{p}{q} < \omega < M$ のとき

$$G_\omega\left(\frac{p}{q}\right) = q^2\left|\omega - \frac{p}{q}\right| < q^2\left|M - \frac{p}{q}\right| = \frac{\cos\theta}{2}$$

を得る．同様に $M < \omega < \frac{r}{s}$ のとき $G_\omega(\frac{r}{s}) < \frac{\cos\theta}{2}$ を得る. □

以上の準備の元に次の定理が証明できてフォードの定理の証明も終わる.

定理 2.22. 無理数 ω の収束分数列を $\{\alpha_n = \frac{p_n}{q_n}\}_{n=0}^{\infty}$ とする．このとき任意の $n \geq 0$ に対して

$$G_\omega(\alpha_n) < \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad G_\omega(\alpha_{n+1}) < \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad G_\omega(\alpha_{n+2}) < \frac{1}{\sqrt{5}}$$

のうちどれか 1 つは成り立つ.

証明．まず α_n と α_{n+1} に補題 2.21 を適用しよう．このとき，$C(\alpha_n)$ と $C(\alpha_{n+1})$ の中心を結ぶ線分と x 軸とのなす角を $\theta > 0$ とすれば，$G_\omega(\alpha_n) < \frac{\cos\theta}{2}$ または $G_\omega(\alpha_{n+1}) < \frac{\cos\theta}{2}$ が成り立つ．従って $\tan\theta > \frac{1}{2}$ すなわち $\cos\theta < \frac{2}{\sqrt{5}}$ のときは証明が終わる．以下では $\tan\theta \leq \frac{1}{2}$ の場合を考える．

ここで補題 2.17 (2) より $\tan\theta = \frac{1}{2}$ となる必要十分条件は $C(\alpha_n)$ と $C(\alpha_{n+1})$ の半径比の平方根が τ となることであるが，いま $C(\alpha_n)$ と $C(\alpha_{n+1})$ の半径比の平方根は有理数 $\frac{q_{n+1}}{q_n}$ であることから，$\tan\theta \neq \frac{1}{2}$ である．従って $\tan\theta < \frac{1}{2}$ の場合を考えればよい．

ここで $C(\alpha_{n+1})$ と $C(\alpha_n \oplus \alpha_{n+1})$ の中心を結ぶ線分と x 軸とのなす角を $\varphi > 0$ とすると，補題 2.17 (2) と補題 2.19 (3) を組み合わせることで $\tan\varphi > \frac{1}{2}$ を得る．次に $C(\alpha_{n+1})$ と $C(\alpha_{n+2})$ の中心を結ぶ線分と x 軸とのなす角 $\psi > 0$ を考えると，$\psi > \varphi$ より $\tan\psi > \frac{1}{2}$ がいえて，これは $\cos\psi < \frac{2}{\sqrt{5}}$ と同値である．ここで α_{n+1} と α_{n+2} に補題 2.20 を適用することで $G_\omega(\alpha_{n+1}) < \frac{\cos\psi}{2} < \frac{1}{\sqrt{5}}$ または $G_\omega(\alpha_{n+2}) < \frac{\cos\psi}{2} < \frac{1}{\sqrt{5}}$ を得る．以上より証明が終わる． □