第2章　フォードの円

この章では有理数を上半平面における円（フォードの円）に対応させてその関係をみる．フォードの円は L. R. Ford によって 20 世紀初等に導入された．フォードの円は連分数と大変相性がよく，これを用いることによって前章の連分数の理論を図形的に理解することができるようになる．Ford はフォードの円を用いてフルビッツの定理の幾何学的な別証明を得ている．この章の最後では Ford による解説文 [9] に従ってこの証明を紹介する．フォードの円は初等幾何のみで扱えるにもかかわらず，残念ながら日本語による解説はほとんど見当たらない．英語による解説は，Ford 自身の解説 [9] 以外では Bonahon による双曲幾何の教科書 [8] の 9 章がよい．

2.1　フォードの円

以下，有理数は全て規約分数表示であるとする．

有理数 $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ に対して，中心が $\left(\frac{p}{q}, \frac{1}{2q^2}\right)$ で半径が $\frac{1}{2q^2}$ である円を $\frac{p}{q}$ に関するフォードの円といい $C(\frac{p}{q})$ と表す．

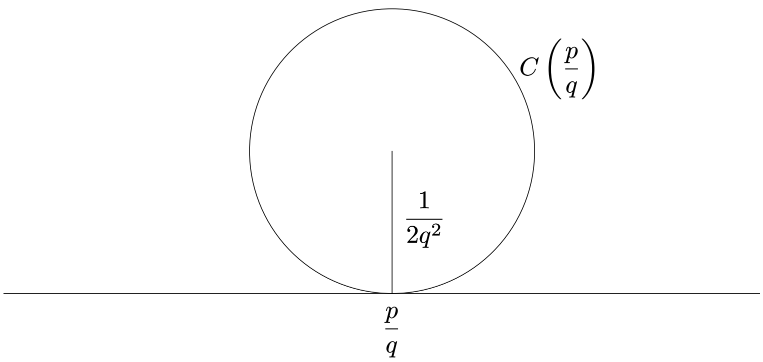

図 2.1: フォードの円 $C(\frac{p}{q})$

定理 2.1. 異なる２つの有理数 $\frac{p}{q}, \frac{r}{s}$ に対して次が成り立つ：

(1) $C(\frac{p}{q})$ と $C(\frac{r}{s})$ は接するか離れている（交わることはない）.

(2) $C(\frac{p}{q})$ と $C(\frac{r}{s})$ が接する必要十分条件は $ps - qr = \pm 1$ となることである.

(3) $C(\frac{p}{q})$ と $C(\frac{r}{s})$ が接する場合，$C(\frac{p+r}{q+s})$ は $C(\frac{p}{q})$, $C(\frac{r}{s})$ の両方に接する（図 *2.2* 参照）.

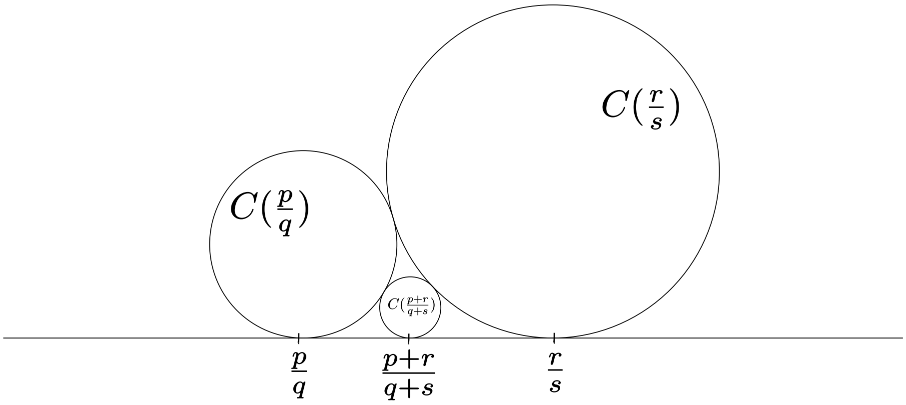

図 2.2: $C(\frac{p+r}{q+s})$ は $C(\frac{p}{q})$, $C(\frac{r}{s})$ の両方に接する.

問題 2.2. この定理を証明せよ.

定義 2.3. (1) ２つの有理数 $\frac{p}{q}, \frac{r}{s}$ が $ps - qr = \pm 1$ を満たすとき，$\frac{p}{q}, \frac{r}{s}$ は**隣り合う**という.

(2) ２つの有理数 $\frac{p}{q}, \frac{r}{s}$ に対して $\frac{p+r}{q+s}$ を $\frac{p}{q} \oplus \frac{r}{s}$ と書いて $\frac{p}{q}, \frac{r}{s}$ の**ファレイ和**と呼ぶ.

定理 2.1 (2) から $\frac{p}{q}, \frac{r}{s}$ が隣り合う必要十分条件は $C(\frac{p}{q})$ と $C(\frac{r}{s})$ が接することである．また，このとき定理 2.2 (3) より $\frac{p}{q} \oplus \frac{r}{s}$ は $\frac{p}{q}$ や $\frac{r}{s}$ とそれぞれ隣り合うことがわかる．すなわち $C(\frac{p}{q} \oplus \frac{r}{s})$ は $C(\frac{p}{q})$, $C(\frac{r}{s})$, x 軸の３つに接する円のうち，$C(\frac{p}{q})$, $C(\frac{r}{s})$, x 軸に囲まれる領域に含まれる唯一のものとして特徴付けら

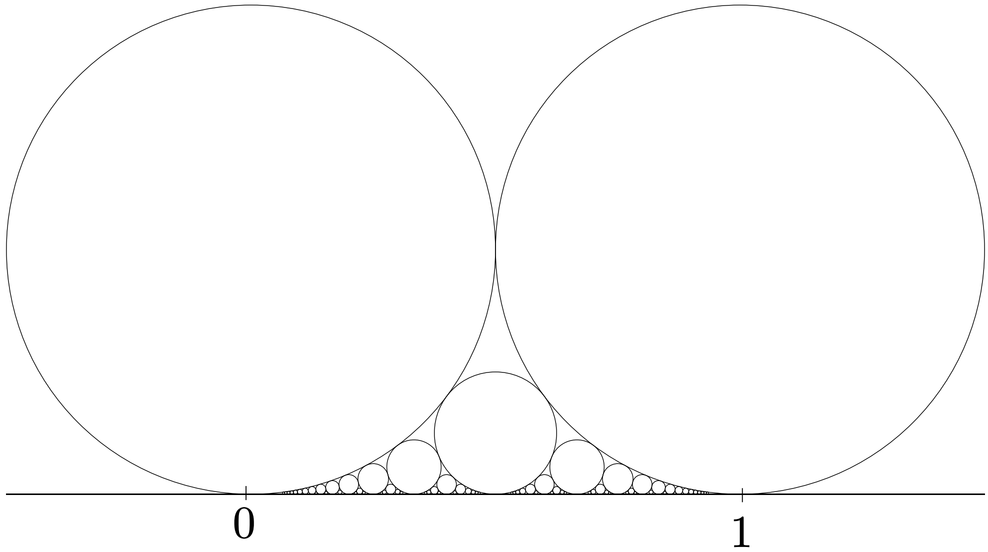

図 2.3: 区間 [0,1] に含まれる有理数に対応するフォードの円

れる．実は $C(\frac{p}{q})$, $C(\frac{r}{s})$, x 軸の 3 つに接する円はもう 1 つ存在して，それは例えば $\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$ かつ $q < s$ のときには $C(\frac{r-p}{s-q})$ と一致する．

以下では $\frac{p}{q}$, $\frac{r}{s}$ が隣り合うとき $C(\frac{p}{q} \oplus \frac{r}{s})$ のことを $C(\frac{p}{q}) \oplus C(\frac{r}{s})$ と表すこともある．

定理 2.1 の性質を用いれば，区間 $[0,1]$ に含まれる有理数に対応するフォードの円を，$C(\frac{0}{1})$ と $C(\frac{1}{1})$ からスタートして次々と描いていくことができる（図 2.3）．

黄金比とフォードの円

黄金比 $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = [1, 1, 1, \ldots]$ に対して，その収束分数 $\alpha_n = [\overbrace{1, 1, \ldots, 1}^{n+1}]$ の既約分数表示を $\frac{p_n}{q_n}$ とするとき

$$\begin{cases} p_0 = 1 \\ q_0 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} p_1 = 2 \\ q_1 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} p_n = p_{n-1} + p_{n-2} \\ q_n = q_{n-1} + q_{n-2} \end{cases} \ (n \geq 2)$$

が成り立つのであった．この漸化式から

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \oplus \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} \quad (n \geq 2)$$

すなわち

$$\alpha_n = \alpha_{n-1} \oplus \alpha_{n-2}$$

が成り立つことに注意する．以下では $C(\alpha_n)$ を C_n と書くことにすると，α_0 と α_1 が隣接する，すなわち $C_0 = C(\alpha_0)$ と $C_1 = C(\alpha_1)$ が接することから，

$$C_2 = C(\alpha_2) = C(\alpha_0 \oplus \alpha_1) = C(\alpha_0) \oplus C(\alpha_1) = C_0 \oplus C_1$$

を得る．以下同様に C_n と C_{n+1} が接するので

$$C_{n+2} = C(\alpha_{n+2}) = C(\alpha_n \oplus \alpha_{n+1}) = C(\alpha_n) \oplus C(\alpha_{n+1}) = C_{n+1} \oplus C_n$$

が成り立つ．従って C_0, C_1 からスタートし，この隙間に収まる C_2 を描き，次に C_1 と C_2 の隙間に収まる C_3 を描き，$\cdots$ という作業を続けることで $\{C_n\}$ が作図できるのである（図 2.4）.

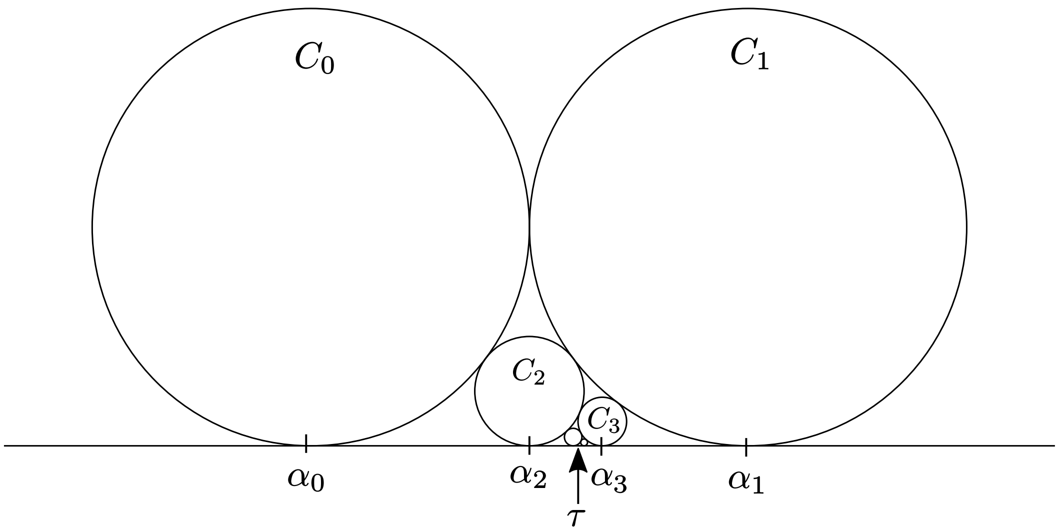

図 2.4: C_n $(n = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$.

以下では便宜上，無限大 ∞ も有理数の仲間に入れて考えると都合がよい．ここで ∞ の既約分数表示は $\frac{1}{0}$ であると約束する．そして $\infty = \frac{1}{0}$ のフォードの円 $C(\frac{1}{0})$ を直線 $y = 1$ と約束する．このとき $C(\frac{1}{0})$ は任意の整数 $k = \frac{k}{1}$ のフォードの円 $C(\frac{k}{1})$ と接しているので，$\frac{1}{0}$ と $\frac{k}{1}$ が隣り合っていることと整合性があり，定理 2.1 は「有理数」$\infty = \frac{1}{0}$ についても成り立つ．このことから $C(\frac{1}{0})$ をこのように定義することは自然であることがわかる.

無理数とフォードの円

さて，無理数 ω の連分数展開を $[a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots]$ とするとき，ω の収束分数 $\alpha_n = [a_0, a_1, \ldots, a_n]$ の既約分数表示 $\frac{p_n}{q_n}$ は

$$\begin{cases} p_{-1} = 1 \\ q_{-1} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} p_0 = a_0 \\ q_0 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \\ q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \end{cases} \ (n \geq 1)$$

によって定まるのであった．従って

$$\alpha_n = \alpha_{n-2} \oplus \overbrace{\alpha_{n-1} \oplus \cdots \alpha_{n-1}}^{a_n}$$

が成り立つ．ここで $C_n = C(\alpha_n)$ と書くことにすると $\alpha_{n-2}, \alpha_{n-1}$ が隣り合うことから

$$C_n = C_{n-2} \oplus \overbrace{C_{n-1} \oplus \cdots \oplus C_{n-1}}^{a_n}$$

が成り立つ．ただし，右辺の意味するところは，まず $C_{n-2} \oplus C_{n-1}$ を考えて，次に $(C_{n-2} \oplus C_{n-1}) \oplus C_{n-1}$ を考えて，… ということを a_n 回繰り返すことを意味する．この操作を繰り返していくと C_n はどんどん小さくなっていき，その極限は ω に収束する．以上のことから，整数 a_0 と自然数の列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が与えられたとき，その連分数展開が $[a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots]$ となるような実数 ω を数直線上に作図する方法はわかった．

いま述べた作図法における ω とフォードの円 $C_n = C(\alpha_n)$ の位置関係をよく観察すれば，逆に数直線上に ω が作図されているときに，フォードの円を次々に作図していくことで，ω の連分数展開の係数 a_n や収束分数 α_n を知ることができる．それには次のようにすればよい．まず ω の整数部分を a_0 とし，$\alpha_{-1} = \frac{1}{0}$, $\alpha_0 = \frac{a_0}{1}$ とおく．そして $C(\alpha_{-1}) = C(\frac{1}{0})$ と $C(\alpha_0) = C(\frac{a_0}{1})$ を作図する．次に

$$C_{-1} \oplus C_0, \quad C_{-1} \oplus C_0 \oplus C_0, \quad C_{-1} \oplus C_0 \oplus C_0 \oplus C_0, \quad \ldots$$

と作図していくと，これらフォードの円と x 軸との接点

$$\alpha_{-1} \oplus \alpha_0, \quad \alpha_{-1} \oplus \alpha_0 \oplus \alpha_0, \quad \alpha_{-1} \oplus \alpha_0 \oplus \alpha_0 \oplus \alpha_0, \quad \ldots$$

は減少していくが，この接点のうち ω を通り過ぎる直前のものを α_1 として採用する．すなわち，整数 a_1 として

$$\alpha_{-1} \oplus \overbrace{\alpha_0 \oplus \cdots \alpha_0}^{a_1+1} < \omega < \alpha_{-1} \oplus \overbrace{\alpha_0 \oplus \cdots \alpha_0}^{a_1}$$

を満たすものを取り，このとき

$$\alpha_1 = \alpha_{-1} \oplus \overbrace{\alpha_0 \oplus \cdots \alpha_0}^{a_1}$$

と定めるのである（図 2.5）．

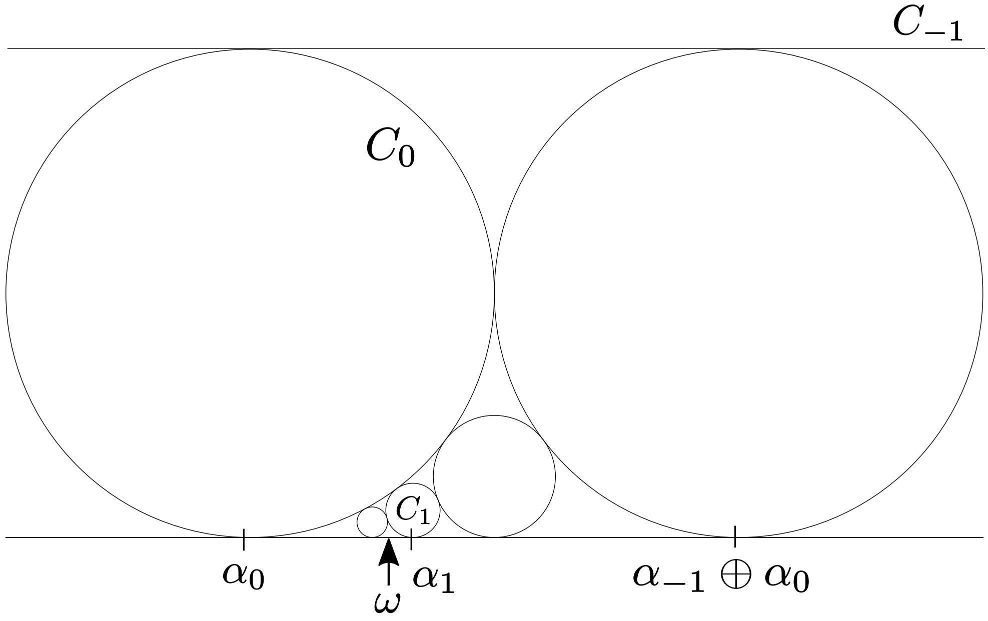

図 2.5: $a_1 = 3$ の場合

以下同様に a_n, α_n を決めていく．繰り返しになるが念のため説明しよう．いま $C_0 = C(\alpha_0), \ldots, C_n = C(\alpha_n)$ までが作図できているとする．ここでは $\alpha_{n-1} < \alpha_n$ の場合を説明しよう．このとき

$$C_{n-1} \oplus C_n, \quad C_{n-1} \oplus C_n \oplus C_n, \qquad C_{n-1} \oplus C_n \oplus C_n \oplus C_n, \quad \ldots$$

と作図していくと，これらフォードの円と x 軸との接点

$$\alpha_{n-1} \oplus \alpha_n, \quad \alpha_{n-1} \oplus \alpha_n \oplus \alpha_n, \quad \alpha_{n-1} \oplus \alpha_n \oplus \alpha_n \oplus \alpha_n, \quad \ldots$$

は単調に増加していくが，この接点のうち ω を通り過ぎる直前のものを α_{n+1} として採用する．すなわち，整数 a_{n+1} として

$$C_{n-1} \oplus \overbrace{C_n \oplus \cdots C_n}^{a_{n+1}} < \omega < C_{-1} \oplus \overbrace{C_0 \oplus \cdots C_0}^{a_{n+1}+1}$$

を満たすものを取り，このとき

$$\alpha_{n+1} = C_{n-1} \oplus \overbrace{C_n \oplus \cdots C_n}^{a_{n+1}}$$

と定めるのである（図 2.6）．

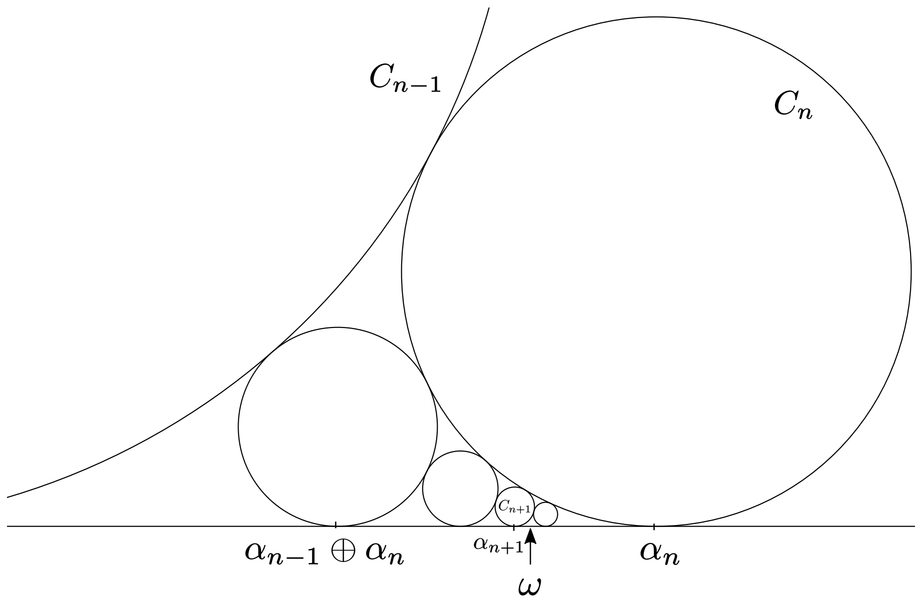

図 2.6: $a_{n+1} = 3$ の場合

このように定めた a_n や α_n が求めるものであること，すなわち $\omega = [a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots]$ と $\alpha_n = [a_0, a_1, \ldots, a_n]$ が成り立つことを納得してほしい．このやり方は，縦横比 $1 : \omega$ の長方形から正方形を順次取っていくことで a_n を求めたやり方に似ていることに気づくであろう．

これまでの説明より次の事実は明らかであるが，以下でよく用いるので補題として述べておく（図 2.7）：

補題 2.4. 無理数 ω の収束分数列を $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ とするとき，任意の $n \geq 0$ に対して ω は α_{n+1} と $\alpha_n \oplus \alpha_{n+1}$ の間に存在する．

この補題を用いると，1 章では計算することで得られた定理 1.12 (3) の主張

$$|\omega - \alpha_{n+1}| < |\omega - \alpha_n|$$

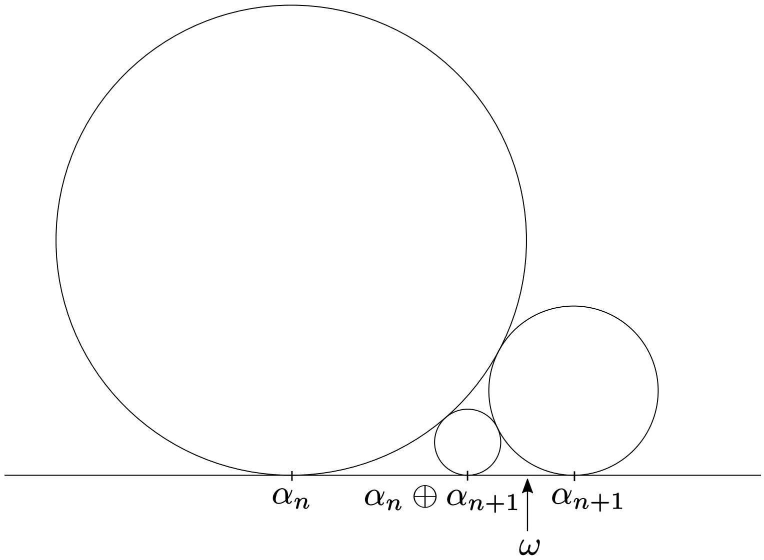

図 2.7: ω は α_{n+1} と $\alpha_n \oplus \alpha_{n+1}$ の間にいる

は図 2.7 から明らかである．また定理 1.12 (1) の

$$\alpha_{n+1} - \alpha_n = \frac{(-1)^n}{q_{n+1} q_n}$$

も図形的に理解できる．実際，三平方の定理を用いると

$$(\alpha_{n+1} - \alpha_n)^2 = \left(\frac{1}{2q_{n+1}^2} + \frac{1}{2q_n^2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2q_{n+1}^2} - \frac{1}{2q_n^2}\right)^2$$

より

$$|\alpha_{n+1} - \alpha_n| = \frac{1}{q_{n+1} q_n}$$

を得るので，あとは符号を考えればよい．