1.5　２次の無理数

無理数 ω は，整数係数２次方程式

$$Ax^2 + Bx + C = 0 \quad (A, B, C \in \mathbb{Z})$$

の解になるとき**２次の無理数**であるという．この方程式の ω と異なる解を ω の**共役解**といい ω' と表す．例えば $\sqrt{2}$ の共役解は $-\sqrt{2}$ で，$\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ の共役解は $\tau' = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ である．次の補題から，この共役解は ω に対して一意的に定まることが分かる．

補題 1.14. ２次の無理数 ω を解に持つ整数係数２次方程式 $Ax^2 + Bx + C = 0$ は $A > 0$ かつ (A, B, C) の最大公約数は 1 という条件の下に一意的に定まる．特に ω の共役解 ω' は ω に対して一意的に定まる．

問題 1.15. この補題を証明せよ．

問題 1.16. ω が２次の無理数であるとき $\omega \neq \omega'$ であることを示せ．

補題 1.17. ω は２次の無理数とする．実数 η に対して

$$\omega = \frac{a\eta + b}{c\eta + d} \quad (a, b, c, d \in \mathbb{Z},\ ad - bc \neq 0)$$

が成り立つとき，η も２次の無理数で

$$\omega' = \frac{a\eta' + b}{c\eta' + d}$$

が成り立つ．

証明. ω が $Ax^2 + Bx + C = 0$ $(A, B, C \in \mathbb{Z})$ の解とする．これに $\omega = \frac{a\eta+b}{c\eta+d}$ を代入した式

$$A\left(\frac{a\eta + b}{c\eta + d}\right)^2 + B\left(\frac{a\eta + b}{c\eta + d}\right) + C = 0$$

は $D\eta^2 + E\eta + F = 0$ $(D, E, F \in \mathbb{Z})$ の形の式に変形できる．従って η は２次の無理数で，$D(\eta')^2 + E\eta' + F = 0$ も成り立つ．ここで先ほどの変形を逆にたどることで

$$A\left(\frac{a\eta' + b}{c\eta' + d}\right)^2 + B\left(\frac{a\eta' + b}{c\eta' + d}\right) + C = 0$$

を得る．従って $\frac{a\eta'+b}{c\eta'+d}$ が $Ax^2+Bx+C=0$ の解となることがわかる．いま上の問題から $\eta \neq \eta'$ であるので $\omega = \frac{a\eta+b}{c\eta+d} \neq \frac{a\eta'+b}{c\eta'+d}$ がわかる（ここに $ad-bc \neq 0$ という条件を用いる）．従って $\omega' = \frac{a\eta'+b}{c\eta'+d}$ がいえる． □

系 1.18. 無理数 $\omega = [a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n, \ldots]$ に対して $\omega = [a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, \omega_n]$ と表すとき $\omega' = [a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, \omega_n']$ が成り立つ．

証明. 1.3 節冒頭で述べたことから，ある整数 p, q, r, s が存在して

$$[a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, t] = \frac{pt+q}{rt+s}$$

が任意の実数 t に対して成り立つ．従って

$$\omega = [a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, \omega_n] = \frac{p\omega_n+q}{r\omega_n+s}$$

に補題 1.17 を適用することで

$$\omega' = \frac{p\omega_n'+q}{r\omega_n'+s} = [a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, \omega_n']$$

を得る． □

ラグランジュの定理

次の定理は ω の連分数展開が途中から繰り返しとなる必要十分条件は ω が２次の無理数であることを主張する．

定理 1.19 (ラグランジュ)**.** 無理数 ω に対して以下は同値：

(1) $\omega = [a_0, \ldots, a_m, \overline{a_{m+1}, \ldots, a_n}]$ となる．すなわち連分数展開が途中から循環する．

(2) ω は２次の無理数．

証明. (1) $\Rightarrow$ (2): $\omega_{m+1} = [\overline{a_{m+1}, \ldots, a_n}]$ とおくと

$$\omega = [a_0, \ldots, a_m, \overline{a_{m+1}, \ldots, a_n}] = [a_0, \ldots, a_m, \omega_{m+1}]$$

であり，補題 1.9 より

$$\omega = \frac{p_m \omega_{m+1} + p_{m-1}}{q_m \omega_{n+1} + q_{m-1}}$$

が成り立つ（ただし ω の m 次収束分数を $\frac{p_m}{q_m}$ と表す）．ここで補題 1.10 より $p_m q_{m-1} - p_{m-1} q_m = \pm 1$ であることを用いると，ω_{m+1} を ω を用いて表すことができて

$$\omega_{m+1} = \frac{q_{m-1}\omega - p_{m-1}}{-q_m \omega + p_m} \tag{$*$}$$

となる．

一方で

$$\omega_{m+1} = [\overline{a_{m+1}, \ldots, a_n}] = [a_{m+1}, \ldots, a_n, \omega_{m+1}]$$

なので，ある整数 p, q, r, s が存在して

$$\omega_{m+1} = \frac{p\omega_{n+1} + q}{r\omega_{m+1} + s} \tag{$**$}$$

と表せる．従って $(*)$ を $(**)$ に代入して整理することで，ω に関する整数係数２次方程式を得る．よって ω は２次の無理数である．

(2) $\Rightarrow$ (1): ω が $Ax^2 + Bx + C = 0$ $(A, B, C \in \mathbb{Z})$ の解とする．$\omega = [a_0, \ldots, a_{n-1}, \omega_n]$ とおくとき，以下の目標は，ある $m, l \in \mathbb{N}$ $(m < l)$ が存在して $\omega_m = \omega_l$ が成り立つことを示すことである．これがいえると

$$\omega_m = [a_m, \ldots, a_{l-1}, \omega_l] = [a_m, \ldots, a_{l-1}, \omega_m] = [\overline{a_m, \ldots, a_{l-1}}]$$

から $\omega = [a_0, \ldots, a_{m-1}, \overline{a_m, \ldots, a_{l-1}}]$ がいえるので証明が終わる．

さて

$$\omega = [a_0, \ldots, a_n, \omega_{n+1}] = \frac{p_n \omega_{n+1} + p_{n-1}}{q_n \omega_{n+1} + q_{n-1}}$$

を $A\omega^2 + B\omega + C = 0$ に代入して整理すると

$$\begin{cases} A_{n+1} = A{p_n}^2 + Bp_n q_n + C{q_n}^2 \\ B_{n+1} = 2Ap_n p_{n-1} + B(p_n q_{n-1} + p_{n-1} q_n) + 2Cq_n q_{n-1} \\ C_{n+1} = A{p_{n-1}}^2 + Bp_{n-1} q_{n-1} + C{q_{n-1}}^2 (= A_n) \end{cases}$$

とおくことで

$$A_{n+1}\omega_{n+1}^2 + B_{n+1}\omega_{n+1} + C_{n+1} = 0$$

を得る．また，任意の n に対して

$$B_{n+1}^2 - 4A_{n+1}C_{n+1} = B^2 - 4AC$$

が成り立つことも計算によって確かめることができる．いま上式の一行目の式を ${q_n}^2$ で割った式

$$\frac{A_{n+1}}{{q_n}^2} = A\left(\frac{p_n}{q_n}\right)^2 + B\ \frac{p_n}{q_n} + C$$

と $0 = A\omega^2 + B\omega + C$ の差を考えて

$$\begin{aligned} \frac{A_{n+1}}{{q_n}^2} &= A\left(\left(\frac{p_n}{q_n}\right)^2 - \omega^2\right) + B\left(\frac{p_n}{q_n} - \omega\right) \\ &= \left(\frac{p_n}{q_n} - \omega\right)\left(A\left(\frac{p_n}{q_n} + \omega\right) + B\right) \end{aligned}$$

を得る．ここで $\left|\omega - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^2}$ を用いると

$$\begin{aligned} |A_{n+1}| &< \left|A\left(\frac{p_n}{q_n} + \omega\right) + B\right| \\ &\leq |A|\left|\frac{p_n}{q_n} + \omega\right| + |B| \\ &< |A|(2|\omega| + 1) + |B| \end{aligned}$$

を得る．従って A_{n+1} は有界であることが分かった．$C_{n+1} = A_n$ であったから C_{n+1} も有界である．また $B_{n+1}^2 - 4A_{n+1}C_{n+1} = B^2 - 4AC$ より B_{n+1} が有界となることもわかる．

以上より ω_n が満たす方程式 $A_n\omega_n^2 + B_n\omega_n + C_n = 0$ に現れる係数 A_n, B_n, C_n は有限個なので方程式も有限個，従ってその解 ω_n も有限個であることがわかる．よって，ある $m, l \in \mathbb{N}$ $(m < l)$ が存在して $\omega_m = \omega_l$ となるので証明が終わる． $\square$

ガロアの定理

次に 2 次の無理数 ω の連分数展開が最初から循環する場合を考えよう．すなわち $\omega = [\overline{a_0, a_1, \ldots, a_n}]$ となる場合である．一般の連分数では a_0 は負の整数となることもあったが，この場合は $a_{n+1} = a_0$ となるため a_0 は自然数であり，特に $\omega > 1$ となることに注意する．

定理 1.20 (ガロア). 無理数 ω に対して次は同値：

(1) $\omega = [\overline{a_0, a_1, \ldots, a_n}]$ となる．すなわち ω の連分数展開は初項から循環する．

(2) ω は 2 次の無理数で $\omega > 1$ かつ $-1 < \omega' < 0$ が成り立つ．

証明. (1) $\Rightarrow$ (2): $\omega = [\overline{a_0, a_1, \ldots, a_n}] = [a_0, a_1, \ldots, a_n, \omega]$ であるので，補題 1.9 より

$$\omega = \frac{p_n\omega + p_{n-1}}{q_n\omega + q_{n-1}}$$

が成り立つ．よって ω を解に持つ 2 次多項式は

$$f(x) = q_n x^2 + (q_{n-1} - p_n)x - p_{n-1}$$

となる．ここで $f(-1) = q_n - q_{n-1} + p_n - p_{n-1} > 0$, $f(0) = -p_{n-1} < 0$ より $f(x) = 0$ は $-1 < x < 0$ の間に解を持つ．一方で $\omega > a_0 \geq 1$ は $f(x) = 0$ の解であるので $-1 < \omega' < 0$ がいえる．

(2) $\Leftarrow$ (1): $\omega = [a_0, \ldots, a_{n-1}, \omega_n]$ とする．最初に，任意の n に対して $\omega_n > 1$, $-1 < \omega_n' < 0$ が成り立つことを帰納法で示そう．$n = 0$ のとき $\omega = \omega_0$ はこの条件を満たすので，ある n に対して $\omega_n > 1$, $-1 < \omega_n' < 0$ が成り立つ仮定して $\omega_{n+1} > 1$, $-1 < \omega_{n+1}' < 0$ を示せばよい．実際 ω_n を解に持つ整数係数 2 次多項式を

$$f_n(x) = A_n x^2 + B_n x + C_n \quad (A_n > 0)$$

とする．ω_{n+1} を解に持つ多項式は $\omega_n = a_n + \frac{1}{\omega_{n+1}}$ を用いると

$$f_{n+1}(x) = (A_n a_n^2 + B_n a_n + C_n)x^2 + (2A_n a_n + B_n)x + A_n$$

となる.（実際 $f_{n+1}(x) = f_n(a_n + \frac{1}{x})x^2$ である.）ここで $f_{n+1}(x)$ の x^2 の係数は $A_n a_n^2 + B_n a_n + C_n = f_n(a_n) < 0$ より負であることに注意する．また

$$f_{n+1}(-1) = f_n(a_n - 1) < 0, \quad f_{n+1}(0) = A_n > 0, \quad f_{n+1}(1) = f_n(a_n + 1) > 0$$

であるので $\omega_{n+1} > 1$, $-1 < \omega_{n+1}' < 0$ がいえる．

さて，

$$\omega_n = [a_n, \omega_{n+1}] = a_n + \frac{1}{\omega_{n+1}}$$

より

$$\omega'_n = [a_n, \omega'_{n+1}] = a_n + \frac{1}{\omega'_{n+1}}$$

が成り立つことが補題よりわかる．この式を

$$-\frac{1}{\omega'_{n+1}} = a_n + (-\omega'_n)$$

と書き直すと $0 < -\omega'_n < 1$ から $a_n = \left[-\frac{1}{\omega'_{n+1}}\right]$ がいえることに注意する．

いま ω は2次の無理数であるから，ラグランジュの定理から $\omega_m = \omega_n$ となる $m, n\ (m < n)$ が存在する．このとき $\omega_{m-1} = \omega_{n-1}$ も成り立つ．実際，$\omega'_m = \omega'_n$ がいえるので，上の注意から $a_{m-1} = a_{n-1}$ がいえる．このとき $\omega_{m-1} = a_{m-1} + \frac{1}{\omega_m}$ と $\omega_{n-1} = a_{n-1} + \frac{1}{\omega_n}$ が等しいことが分かる．

この議論を繰り返すと $\omega = \omega_0$ と ω_{n-m} が等しいことが分かり

$$\omega = [a_0, \ldots, a_{n-m-1}, \omega] = [\overline{a_0, \ldots, a_{n-m-1}}]$$

がいえる． □

定理 1.21 (ガロア)**.** $\omega = [\overline{a_0, a_1, \ldots, a_n}]$ であるとき

$$-\frac{1}{\omega'} = [\overline{a_n, \ldots, a_1, a_0}]$$

が成り立つ．

証明. まず例で説明しよう．$\omega = [\overline{2, 3}]$ の場合を考える．

$$\omega = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{\omega}} \iff \frac{1}{\omega - 2} = 3 + \frac{1}{\omega} \iff 3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{-\frac{1}{\omega}}} = -\frac{1}{\omega}$$

より $-\frac{1}{\omega} = [\overline{3, 2}]$ を得る．一般の場合も同様に考えればよい．

行列を用いることで，この議論はより見通しがよくなる．以下ではこの説明をしよう．系 1.18 を用いると $\omega = [a_0, \ldots, a_n, \omega]$ より $\omega' = [a_0, \ldots, a_n, \omega']$ が成り立つ．

従って，定理 1.11 の証明の中で導入した記号を用いると

$$\omega' = \begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \omega'$$

が成り立つ．ここで

$$\begin{pmatrix} k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

を用いると

$$\begin{aligned} \omega' &= \begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdots \begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \omega' \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \omega' \end{aligned}$$

を得る．これより

$$-\frac{1}{\omega'} = \begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \left(-\frac{1}{\omega'}\right)$$

すなわち

$$-\frac{1}{\omega'} = [\overline{a_n, \ldots, a_1, a_0}]$$

を得る． □

回文性

回文とは「新聞紙」や「竹藪焼けた」や「イタリアでもホモでありたい」のように上から読んでも下から読んでも同じである文のことをいう．ここでは ω の連分数展開の循環部分が回文的になる条件を考える．

定理 1.22. 無理数 ω に対して次は同値：

(1) $\omega = [\overline{a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n}]$ $\quad (a_0 = a_n, a_1 = a_{n-1}, \ldots)$ となる．すなわち ω の連分数展開は初項から循環して，その循環部分は回文的．

(2) ω は 2 次の無理数で $\omega > 1$ かつ $\omega\,\omega' = -1$ が成り立つ．

(3) ω は $Ax^2 - Bx - A = 0$ $(A, B \in \mathbb{N})$ の形の 2 次方程式の解となる．

証明．(1) $\Rightarrow$ (2): 初項から循環することから $\omega = [\overline{a_0, a_1, \ldots, a_n}] > 1$ であり，また定理より $-\frac{1}{\omega'} = [\overline{a_n, \ldots, a_1, a_0}]$ が成り立つ．従って回文性より $\omega = -\frac{1}{\omega'}$ すなわち $\omega\omega' = -1$ を得る．

(2) $\Rightarrow$ (1): まず $\omega > 1$ と $\omega\omega' = -1$ より $-1 < \omega' < 0$ である．従って定理 1.20 より ω の連分数展開は初項から循環する．また $\omega = -\frac{1}{\omega'}$ なので，定理より回文的であることがわかる．

(2) $\Leftrightarrow$ (3) は容易に確認できる． □

幾つか例を挙げよう：

- ω が $3x^2 - 2x - 3 = 0$ の解のとき $\omega = [\overline{1, 2, 1}]$.
- ω が $7x^2 - 5x - 7 = 0$ の解のとき $\omega = [\overline{1, 2, 2, 1}]$
- ω が $2x^2 - 5x - 2 = 0$ の解のとき $\omega = [\overline{2, 1, 5, 1, 2}]$

定理 1.23. 平方数ではない自然数 D に対して

$$\sqrt{D} = [a_0, \overline{a_1, a_2, \ldots, a_n, 2a_0}]$$

が成り立つ．さらに $a_1, a_2, \ldots, a_n$ の部分は回文的である．

証明．$\sqrt{D} = [a_0, a_1, \ldots]$ とする．このとき $\sqrt{D}$ の整数部分は a_0 である．いま $\omega = a_0 + \sqrt{D}$ とおくと $\omega' = a_0 - \sqrt{D}$ より $\omega > 1$ かつ $-1 < \omega' < 0$ が成り立つ．従って ω の連分数展開は初項から循環し，ω の整数部分が $2a_0$ であることより

$$\omega = [\overline{2a_0, a_1, \ldots, a_n}]$$

と書ける．$\omega = [2a_0, \overline{a_1, a_2, \ldots, a_n, 2a_0}]$ と書き直すことで

$$\sqrt{D} = [a_0, \overline{a_1, a_2, \ldots, a_n, 2a_0}]$$

を得る．

次に回文性について示そう．$\omega = [\overline{2a_0, a_1, \ldots, a_n}]$ なので定理 2.21 より

$$-\frac{1}{\omega'} = [\overline{a_n, \ldots, a_1, 2a_0}] = \left[a_n, \ldots, a_1, 2a_0, -\frac{1}{\omega'}\right] = [a_n, \ldots, a_1, \omega]$$

を得る．ただし，２番目の等号には $[2a_0, -\frac{1}{\omega'}] = 2a_0 - \omega' = \omega$ を用いた．一方で $\omega = [2a_0, a_1, \ldots, a_n, \omega]$ より

$$\frac{1}{\omega - 2a_0} = [a_1, \ldots, a_n, \omega]$$

が成り立つ．ここで $\omega + \omega' = 2a_0$ より $\frac{1}{\omega-2a_0} = -\frac{1}{\omega'}$ であるので

$$-\frac{1}{\omega'} = [a_1, \ldots, a_n, \omega]$$

を得る．以上より $[a_n, \ldots, a_1, \omega] = [a_1, \ldots, a_n, \omega]$ が成り立つ．このとき両辺の整数部分を見比べて $a_n = a_1$ を得る．さらに両辺から $a_n = a_1$ を引いて逆数を取り，それぞれの整数部分を見比べることで $a_{n-1} = a_2$ を得る．以下同様にして $a_1, a_2, \ldots, a_n$ の部分は回文的であることがわかった． □

幾つか例を挙げよう：

$$\begin{aligned}
\sqrt{7} &= [2, \overline{1, 1, 1, 4}] \\
\sqrt{31} &= [5, \overline{1, 1, 3, 5, 3, 1, 1, 10}] \\
\sqrt{50} &= [7, \overline{14}] \\
\sqrt{58} &= [7, \overline{1, 1, 1, 1, 1, 1, 14}] \\
\sqrt{72} &= [8, \overline{2, 16}] \\
\sqrt{94} &= [9, \overline{1, 2, 3, 1, 1, 5, 1, 8, 1, 5, 1, 1, 3, 2, 1, 18}]
\end{aligned}$$

問題 1.24. $\omega = [n, \overline{2n}]$ となる数は何か？