1.4　収束分数列

無理数 ω の連分数展開を $[a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots]$ とする．ω の n 次収束分数 $\alpha_n = [a_0, a_1, \ldots, a_n]$ の既約分数表示を $\frac{p_n}{q_n}$ とするとき，定理 1.8 から数列 $\{p_n\}$, $\{q_n\}$ は

$$\begin{cases} p_{-1} = 1 \\ q_{-1} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} p_0 = a_0 \\ q_0 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \\ q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \end{cases} (n \geq 1)$$

という漸化式で定まるのであった．

定理 1.12. 上の記号のもとに，$n \geq 0$ に対して次が成り立つ：

(1) $\alpha_{n+1} - \alpha_n = \dfrac{(-1)^n}{q_{n+1} q_n}$,

(2) $\dfrac{1}{(q_{n+1} + q_n) q_n} < |\omega - \alpha_n| < \dfrac{1}{q_{n+1} q_n}$.

(3) $|\omega - \alpha_{n+1}| < |\omega - \alpha_n|$

証明. (1)　$n \geq 0$ に対して

$$\alpha_{n+1} - \alpha_n = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{p_{n+1} q_n - p_n q_{n+1}}{q_{n+1} q_n} = \frac{(-1)^n}{q_{n+1} q_n}.$$

(2)　$\omega = [a_0, \ldots, a_n, \omega_{n+1}]$ に対して補題 1.9 を適用することで

$$\omega - \alpha_n = \frac{p_n \omega_{n+1} + p_{n-1}}{q_n \omega_{n+1} + q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{-(p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n)}{(q_n \omega_{n+1} + q_{n-1}) q_n} = \frac{(-1)^n}{(q_n \omega_{n+1} + q_{n-1}) q_n}$$

が成り立つ．ここで $a_{n+1} < \omega_{n+1} < a_{n+1} + 1$ と $q_{n+1} = a_{n+1} q_n + q_{n-1}$ より

$$q_{n+1} < q_n \omega_{n+1} + q_{n-1} < q_{n+1} + q_n$$

が成り立つので

$$\frac{1}{(q_{n+1} + q_n) q_n} < \left| \omega - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_{n+1} q_n}$$

を得る．

(3)　(2) より

$$|\omega - \alpha_{n+1}| < \frac{1}{q_{n+2} q_{n+1}}, \qquad \frac{1}{(q_{n+1} + q_n) q_n} < |\omega - \alpha_n|$$

が成り立つので

$$\frac{1}{q_{n+2}q_{n+1}} < \frac{1}{(q_{n+1}+q_n)q_n}$$

すなわち $q_{n+2}q_{n+1} > (q_{n+1}+q_n)q_n$ がいえるとよい．この不等式は $q_{n+2} = a_{n+2}q_{n+1}+q_n \geq q_{n+1}+q_n$ と $q_{n+1} > q_n$ の辺々を掛け合わせることで得られる． □

定理 1.13. 無理数 $\omega = [a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots]$ に対して $\alpha_n = [a_0, a_1, \ldots, a_n]$ とおくとき $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \omega$ が成り立つ．

証明. ここで

$$q_n - q_{n-1} = (a_n - 1)q_{n-1} + q_{n-2} \geq q_{n-2} > 0$$

より q_n は狭義単調増大列である．従って上の定理 (2) から

$$\alpha_n = \frac{p_n}{q_n} \to \omega \quad (n \to \infty)$$

が分かる． □

さらに

$$\alpha_1 < \alpha_3 < \alpha_5 < \cdots < \omega < \cdots < \alpha_6 < \alpha_4 < \alpha_2$$

が成り立つ．