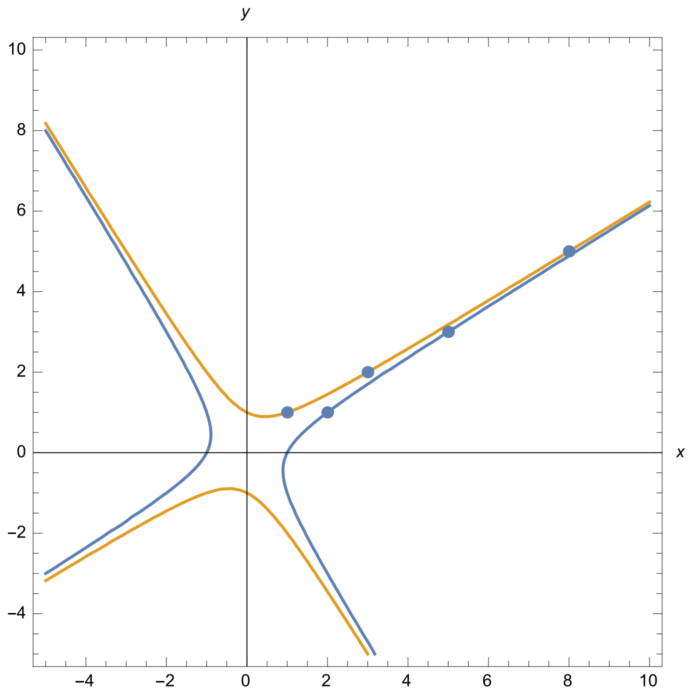

図 1.5: 曲線 $x^2 - xy - y^2 = 1$（青）と $x^2 - xy - y^2 = -1$（オレンジ）および点 (p_n, q_n) $(n = 0, 1, 2, 3, 4)$.

1.3 無理数の連分数展開

ここでは一般の無理数 ω を連分数で表すことを考えよう．まず記号を準備しておく．今までの連分数展開の書き方を拡張して任意の実数 t に対して

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots \, \cfrac{\ddots}{a_n + \cfrac{1}{t}}}} \qquad (a_0 \in \mathbb{Z},\ a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N})$$

のことも $[a_0, \ldots, a_n, t]$ と表すことにする．このとき $[a_0, \ldots, a_n, t]$ は t の関数とみることができる．このことは

$$[2,3,1,t] = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{t}}} = \frac{9t+7}{4t+3}$$

のように書き直すとわかりやすい．また同様に考えれば，任意の $[a_0, \ldots, a_n, t]$ はある整数 p, q, r, s を用いて $\frac{pt+q}{rt+s}$ の形にかけることもわかる．

ではは無理数 ω の連分数展開に戻ろう．まず ω の整数部分を a_0, 小数部分を r_1 とおく：

$$\omega = a_0 + r_1 \quad (a_0 \in \mathbb{Z},\ 0 < r_1 < 1).$$

次に $\omega_1 = \frac{1}{r_1}$ とおくと $\omega_1 > 1$ であるので，ω のときと同様にして

$$\omega_1 = a_1 + r_2 \quad (a_1 \in \mathbb{N},\ 0 < r_2 < 1)$$

と書ける．ここで再び $\omega_2 = \frac{1}{r_2}$ とおく．ここまでのことをまとめると

$$\omega = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\omega_2}} = [a_0, a_1, \omega_2]$$

となる．以下同様にして

$$\omega_n = a_n + \frac{1}{\omega_{n+1}} \quad (a_n \in \mathbb{N},\ \omega_{n+1} > 1)$$

となるように ω_n から a_n と ω_{n+1} を定めることで，数列 $\{a_n\}$, $\{\omega_n\}$ を得る．このとき

$$\omega = [a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, \omega_n]$$

が成り立つ．また

$$\omega = [a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots]$$

を ω の**連分数展開**という．無理数の連分数展開は必然的に無限に続くことに注意しよう．実際，有限で終わったらそれは有理数に書き直せるからである．

ここで幾つかの無理数の連分数展開を紹介しよう．ただし，連分数の係数が途中から繰り返しになる場合，例えば $[5,3,1,7,3,1,7,3,1,7,\ldots]$ などは $[5,\overline{3,1,7}]$ のように繰り返しの部分に線を引いて表す．

(1) $\sqrt{2} = [1, 2, 2, 2, \ldots] = [1, \overline{2}]$

(2) $\tau = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = [1, 1, 1, \ldots] = [\overline{1}]$

(3) $\sqrt{22} = [4, \overline{1, 2, 4, 2, 1, 8}]$

(4) $2^{1/3} = [1, 3, 1, 5, 1, 1, 4, 1, 1, 8, 1, 14, 1, 10, 2, 1, 4, 12, 2, 3, \ldots]$

(5) $e = [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, 1, 1, 12, 1, 1, \ldots]$

(6) $\pi = [3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2, \ldots]$

後ほど，連分数が途中から繰り返しになる必要十分条件は整数係数 2 次多項式の解となることを示す．e は繰り返しにはならないが規則性があることが見て取れる．一方で $2^{1/3}$ や π にはそのような規則性は見当たらない．

参考までに縦横比 π の長方形の図を載せる．292 という数がこの図のどこに現れるかを考えてみよ．

図 1.6: 縦横比 π の長方形

定義 1.7 (収束分数). 無理数 ω の連分数展開が $[a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots]$ であるとする．このとき連分数を途中で打ち切った有理数

$$\alpha_n = [a_0, a_1, \ldots, a_n]$$

を ω の（n 番目の）**収束分数**とよぶ．また数列 $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ を ω の**収束分数列**とよぶ．

ここで，無理数 ω に収束する勝手な有理数の列を収束分数列とよぶわけではないことに注意する．上のような，連分数展開から得られる由緒正しい分数列を収束分数列とよぶのである．

以下では無理数 ω の収束分数列 $\{\alpha_n\}$ について，その名が示すとおり

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \omega$$

が成り立つことを示す（定理 1.13）．そのために，まず $\alpha_n = [a_0, a_1, \ldots, a_n]$ の既約分数表示 $\frac{p_n}{q_n}$ に現れる p_n, q_n を係数 $a_0, a_1, \ldots, a_n$ から求める方法を述べる．それが次の定理 1.8 である．証明の都合により，まず天下り的に p_n, q_n を定めて，そのときこの $\frac{p_n}{q_n}$ が α_n の既約分数表示になるという形で定理の主張を述べる．

定理 1.8. 無理数 $\omega = [a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots]$ に対して数列 $\{p_n\}_{n=-1}^{\infty}$, $\{q_n\}_{n=-1}^{\infty}$ を

$$\begin{cases} p_{-1} = 1 \\ q_{-1} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} p_0 = a_0 \\ q_0 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \\ q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \end{cases} (n \geq 1)$$

のように定めると任意の $n \geq 0$ に対して (p_n, q_n) の最大公約数は 1 で

$$[a_0, \ldots, a_n] = \frac{p_n}{q_n}$$

が成り立つ．

この定理の証明のために次の補題 1.9 と補題 1.10 を準備する．

補題 1.9. 定理 *1.8* の記号のもとに，任意の $n \geq 0$ と任意の実数 t に対して

$$[a_0, a_1, \ldots, a_n, t] = \frac{p_n t + p_{n-1}}{q_n t + q_{n-1}} \quad (n \geq 0)$$

が成り立つ．

証明. n に関する帰納法で示す．$n = 0$ のとき

$$[a_0, t] = a_0 + \frac{1}{t} = \frac{a_0 t + 1}{t} = \frac{p_0 t + p_{-1}}{q_0 t + q_{-1}}$$

となり成立する．n に対して成り立つと仮定すると，$n+1$ のときも

$$\begin{aligned}[a_0,\dots,a_n,a_{n+1},t] &= \left[a_0,\dots,a_n,a_{n+1}+\frac{1}{t}\right]\\ &= \frac{p_n\left(a_{n+1}+\frac{1}{t}\right)+p_{n-1}}{q_n\left(a_{n+1}+\frac{1}{t}\right)+q_{n-1}}\\ &= \frac{(p_na_{n+1}+p_{n-1})t+p_n}{(q_na_{n+1}+q_{n-1})t+q_n}\\ &= \frac{p_{n+1}t+p_n}{q_{n+1}t+q_n}\end{aligned}$$

で成り立つ． □

補題 1.10. 定理の記号のもとに，$n \geq 0$ に対して次が成り立つ：

(1) $\begin{pmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

(2) $p_nq_{n-1}-p_{n-1}q_n = (-1)^{n+1}.$

証明. (1)

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} p_{n-1} & p_{n-2} \\ q_{n-1} & q_{n-2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} p_{-1} & p_0 \\ q_{-1} & q_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

(2) は (1) の両辺の判別式を取ればよい． □

定理 *1.8* の証明. 補題 1.9 で，特に $t = a_n$ とすると

$$\alpha_n = [a_0,\dots,a_{n-1},a_n] = \frac{p_{n-1}a_n+p_{n-2}}{q_{n-1}a_n+q_{n-2}} = \frac{p_n}{q_n}$$

が成り立つ．また，補題 1.10 (2) から，特に (p_n, q_n) 最大公約数は 1 であることが分かるので $\frac{p_n}{q_n}$ は既約分数である． □

定理 1.8 の別証明

行列を用いると，定理 1.8 に対して見通しのよい証明を与えることができる．この証明のメリットは数列 $\{p_n\}$, $\{q_n\}$ の漸化式を天下り的に与えなくて良いという点である．そのような形で定理 1.8 の主張を書き直し，証明を与えよう．

定理 1.11 (定理 1.8 の言い換え)**.** 無理数 $\omega = [a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots]$ に対してその収束分数 $[a_0, a_1, \ldots, a_n]$ の既約分数表示を $\frac{p_n}{q_n}$ とするとき，数列 $\{p_n\}_{n=-1}^{\infty}$, $\{q_n\}_{n=-1}^{\infty}$ は次の漸化式を満たす：

$$\begin{cases} p_{-1} = 1 \\ q_{-1} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} p_0 = a_0 \\ q_0 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \\ q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \end{cases} (n \geq 1)$$

証明. 行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と実数 t に対して

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} t = \frac{at+b}{ct+d}$$

と定義する．このとき 2 つの行列 M, N に対して $M(Nt) = (MN)t$ が成り立つことに注意する．この記号のもとで

$$a_i + \frac{1}{t} = \frac{a_i\, t + 1}{t} = \begin{pmatrix} a_i & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} t$$

と書けることを用いると

$$[a_0, a_1, \ldots, a_n, t] = \begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} t$$

が任意の実数 t に対して成り立つことがわかる．ここで

$$\begin{pmatrix} A_n & B_n \\ C_n & D_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とおく．このとき

$$[a_0, a_1, \ldots, a_n, t] = \begin{pmatrix} A_n & B_n \\ C_n & D_n \end{pmatrix} t = \frac{A_n t + B_n}{C_n t + D_n}$$

が成り立つ．ここで $t \to \infty$ とすると，右辺は $\frac{A_n}{C_n}$ に収束し，左辺は

$$[a_0, a_1, \ldots, a_n, t] = \left[a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n + \frac{1}{t}\right]$$

と書き直すことで $[a_0, a_1, \ldots, a_n]$ に収束することがわかる．従って

$$[a_0, a_1, \ldots, a_n] = \frac{A_n}{C_n}$$

を得る．ここで $[a_0, a_1, \ldots, a_n]$ の既約分数表示を $\frac{p_n}{q_n}$ としていたので

$$\frac{A_n}{C_n} = \frac{p_n}{q_n}$$

となる．さらに補題 1.10 (2) と同じ議論で $A_nD_n - B_nC_n = \pm 1$ を得て，これより (A_n, D_n) の最大公約は 1 となるので

$$A_n = p_n, \quad C_n = q_n$$

が分かる．一方で

$$\begin{pmatrix} A_n & B_n \\ C_n & C_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{n-1} & B_{n-1} \\ C_{n-1} & D_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_nA_{n-1} + B_{n-1} & A_{n-1} \\ a_nC_{n-1} + D_{n-1} & C_{n-1} \end{pmatrix}$$

が成り立つので，両端の行列の 2 列目を見比べて

$$B_n = A_{n-1} = p_{n-1}, \quad D_n = C_{n-1} = q_{n-1}$$

を得る．次に 1 行目を見比べることで

$$\begin{cases} p_n = a_np_{n-1} + p_{n-2} \\ q_n = a_nq_{n-1} + q_{n-2} \end{cases}$$

を得る． $\square$