1.2　黄金比の連分数展開

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\ddots}}} = [1, 2, 2, \ldots]$$

であった．では

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots}}} = [1, 1, 1, \ldots]$$

となる x はどのような数だろうか？　連分数の形から x は $x = 1 + \frac{1}{x}$ を満たすことがわかる．この方程式は $x^2 - x - 1 = 0$ と書き直せて，その解は $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ となる．ここで求める x は正であるので $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ を得る．この値 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ は**黄金比**と呼ばれる．以下では黄金比を

$$\tau = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

と表す．

　黄金比 τ の無限連分数展開を途中で打ち切ったものを $\alpha_n = [\overbrace{1, 1, \ldots, 1}^{n+1}]$ を定めると

$$\alpha_0 = \frac{1}{1}, \quad \alpha_1 = \frac{2}{1}, \quad \alpha_2 = \frac{3}{2}, \quad \alpha_3 = \frac{5}{3}, \quad \alpha_4 = \frac{8}{5}, \quad \ldots$$

のようになる．ここで $\alpha_n = \dfrac{p_n}{q_n}$（既約分数表示）と表すとき，数列 $\{p_n\}$, $\{q_n\}$ の一般項がどのように表されるかを考えたい．いま

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \alpha_{n+1} = 1 + \frac{1}{\alpha_n} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{p_n}{q_n}} = \frac{p_n + q_n}{p_n}$$

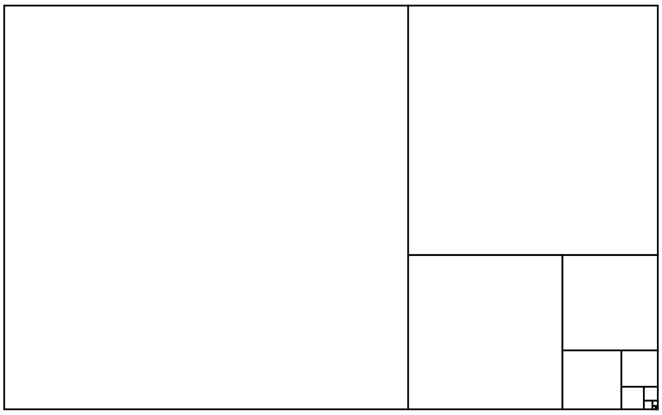

図 1.4: 縦横比が黄金比 τ の長方形

であり，$\frac{p_n}{q_n}$ が既約のとき $\frac{p_n+q_n}{p_n}$ が既約であることも容易にわかるので，漸化式

$$\begin{cases} p_0 = 1 \\ q_0 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} p_{n+1} = p_n + q_n \\ q_{n+1} = p_n \end{cases} \quad (n \geq 0) \tag{$*$}$$

を得る．これを書き直すと

$$\begin{cases} p_0 = 1, \quad p_1 = 2, \quad p_{n+2} = p_{n+1} + p_n \\ q_0 = 1, \quad q_1 = 1, \quad q_{n+2} = q_{n+1} + q_n \end{cases}$$

のように，数列 $\{p_n\}$, $\{q_n\}$ それぞれの隣接 3 項間の漸化式を得る．従って数列 $\{p_n\}$, $\{q_n\}$ の一般項は，$x^2 - x - 1 = 0$ の 2 解を $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\tau' = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ $(= 1 - \tau = -\frac{1}{\tau})$ とおくことで

$$p_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\tau^{n+2} + (\tau')^{n+2}\right), \quad q_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\tau^{n+1} + (\tau')^{n+1}\right)$$

と表すことができる．このことから $\alpha_n = \frac{p_n}{q_n} \to \tau$ $(n \to \infty)$ もわかる．

以上の議論は行列を用いると見通しが良くなる．式 $(*)$ は行列を用いると

$$\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$$

と書き直すことができる．ここで

$$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{n-1} \\ q_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} p_{n-2} \\ q_{n-2} \end{pmatrix} = \cdots = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \end{pmatrix}$$

となるので $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n$ の計算ができればよい．この計算は 1 年生の線形代数で習うが，答のみを書くと

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \tau^{n+1} - (\tau')^{n+1} & \tau^n - (\tau')^n \\ \tau^n - (\tau')^n & \tau^{n-1} - (\tau')^{n-1} \end{pmatrix}$$

となる．これより数列 $\{p_n\}$, $\{q_n\}$ の一般項が計算できるのである．

さて，上と同様の考察で

$$\begin{pmatrix} p_{n+1} & p_n \\ q_{n+1} & q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{pmatrix} = \cdots = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} p_1 & p_0 \\ q_1 & q_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n+2}$$

がわかる．ただし $\begin{pmatrix} p_1 & p_0 \\ q_1 & q_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2$ を用いた．このことから次の重要な性質が得られる．

補題 1.4. 上の数列 $\{p_n\}$, $\{q_n\}$ に対して $p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1} = (-1)^n$ が任意の $n \geq 0$ に対して成り立つ．

証明. 2 つの正方行列 A, B に対して $\det(AB) = \det A \det B$ が成り立つので

$$p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1} = \det \begin{pmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{pmatrix} = \left(\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)^{n+2} = (-1)^{n+2} = (-1)^n.$$

□

定理 1.5. 上の数列 $\{p_n\}$, $\{q_n\}$ に対して平面上の点 (p_n, q_n) は曲線 $x^2 - xy - y^2 = (-1)^{n+1}$ 上にある（図 *1.5* 参照）．

証明. $p_{n+1} = p_n + q_n$, $q_{n+1} = p_n$ を用いると，上の補題で得た式 $p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1} = (-1)^n$ は $(p_n)^2 - p_nq_n - (q_n)^2 = (-1)^{n+1}$ となる． □

曲線 $x^2 - xy - y^2 = \pm 1$ の漸近線は $y = \frac{1}{\tau}x$ と $y = -\tau x$ である．点 (p_n, q_n) がどんどん直線 $y = \frac{1}{\tau}x$ に近づいていくことは $\frac{p_n}{q_n} \to \tau$ $(n \to \infty)$ に対応している．

問題 1.6. 上と同様のことを $\sqrt{2} = [1, 2, 2, 2, \ldots]$ で考えてみよ．すなわち $\alpha_n = [1, \overbrace{2, \ldots, 2}^{n}]$ とおき，α_n の既約分数表示を $\frac{p_n}{q_n}$ とするとき $\{p_n\}$, $\{q_n\}$ の一般項を求めよ．また点 (p_n, q_n) はどのような曲線上にあるか？

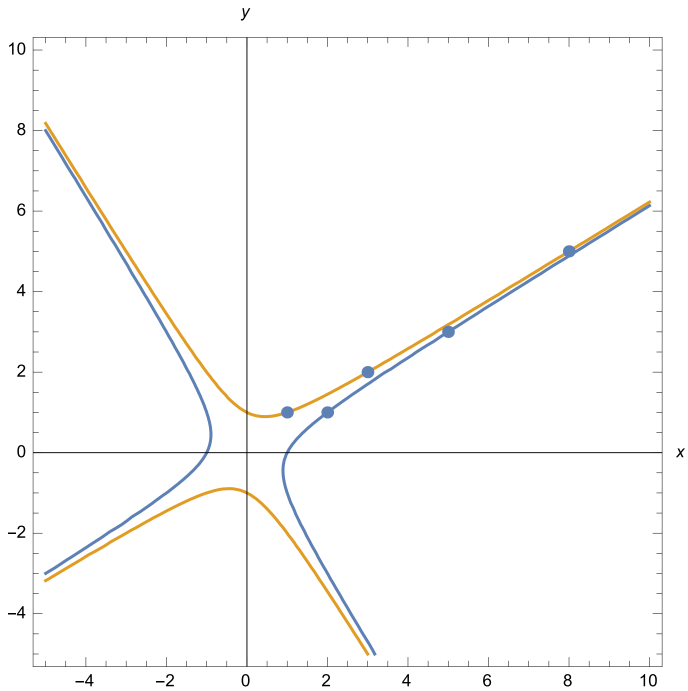

図 1.5: 曲線 $x^2 - xy - y^2 = 1$（青）と $x^2 - xy - y^2 = -1$（オレンジ）および点 (p_n, q_n) $(n = 0, 1, 2, 3, 4)$.

1.3　無理数の連分数展開

ここでは一般の無理数 ω を連分数で表すことを考えよう．まず記号を準備しておく．今までの連分数展開の書き方を拡張して任意の実数 t に対して

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots \, \cfrac{\ddots}{a_n + \cfrac{1}{t}}}} \qquad (a_0 \in \mathbb{Z},\ a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N})$$