第1章　連分数

以下では次の記号を用いる：

$$
\begin{aligned}
\mathbb{N} &= \{1, 2, 3, \ldots\} \quad \text{自然数全体} \\
\mathbb{Z} &= \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\} \quad \text{整数全体} \\
\mathbb{Q} &= \left\{ \frac{p}{q} \,:\, p \in \mathbb{Z},\, q \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{有理数全体} \\
\mathbb{R} & \qquad \text{実数全体} \\
\mathbb{C} &= \{z = x + iy : x, y \in \mathbb{R}\} \quad \text{複素数全体}
\end{aligned}
$$

1.1　連分数とは？

まず具体例を見てみよう．

$$
5 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{17}} \quad \text{や} \quad 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4}}}
$$

のようにはしご状の分数で表された数を連分数という．ただし分子には全て 1 が入る．与えられた連分数は，例えば

$$
1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\cfrac{13}{4}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{4}{13}} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{30}{13}} = \frac{43}{30}
$$

のように有理数に変形することができる．逆に，与えられた有理数，例えば $\frac{25}{9}$ は次のように連分数に変形できる：

$$\frac{25}{9} = 2+\frac{7}{9} = 2+\cfrac{1}{\cfrac{9}{7}} = 2+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{7}} = 2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{7}{2}}} = 2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2}}}.$$

ここで連分数の正確な定義を述べておこう．

定義 1.1. 連分数とは

$$a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{\ddots\cfrac{\ddots}{a_{n-1}+\cfrac{1}{a_n}}}}} \qquad (a_0\in\mathbb{Z}, a_1, a_2, \ldots, a_n\in\mathbb{N})$$

の形をした数のことである．この連分数を以下では簡単に

$$[a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n]$$

と表す．

注. a_0 は負の整数であることも許す．このように定義することで，任意の有理数は連分数の形に表すことができる．

さて，最初に挙げた計算を図形的に理解してみよう．図 1.1 のように縦 9 横 25 の長方形を用意する．このとき $\frac{25}{9}$ を連分数に直す計算は次のような操作に対応する：まず一辺が 9 の正方形を取れるだけ取り，次に残った長方形から一辺が 7 の正方形を取れるだけ取り，$\cdots$ という操作を繰り返す．図 1.2 を参考に $\frac{43}{30}$ についても理解してほしい．このように正の有理数を連分数の形に直す計算は，長方形から正方形を取っていく操作で理解できる．

ここまでは有理数の連分数展開を考えたが，では無理数を連分数に表そうとするとどうなるだろうか？例として $\sqrt{2}$ の場合を考えて見よう．$1<\sqrt{2}<2$ に

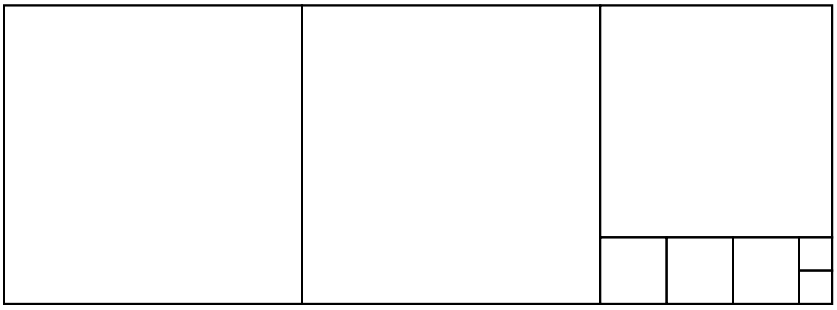

図 1.1: 縦横比が $\dfrac{25}{9} = [2,1,3,2]$ の長方形

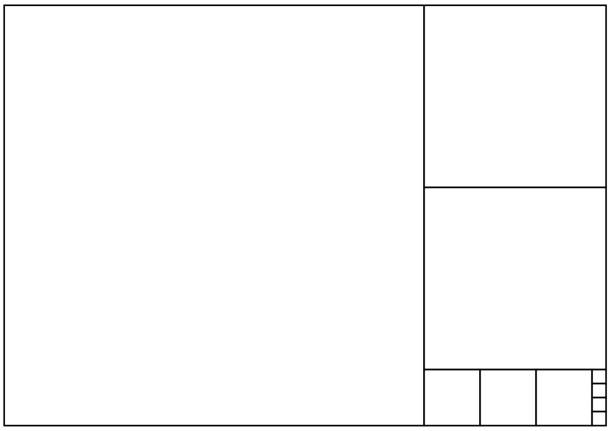

図 1.2: 縦横比が $\dfrac{43}{30} = [1,2,3,4]$ の長方形

注意すると

$$\sqrt{2} = 1 + (\sqrt{2}-1) = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{\sqrt{2}-1}} = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{2+(\sqrt{2}-1)} = \cdots$$

のように計算を進めることができる．ここで

$$\sqrt{2} - 1 = 2 + \frac{1}{\sqrt{2}-1}$$

に注意すれば

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\ddots}}}}} = [1, 2, 2, 2, 2, \ldots]$$

となることがわかる.

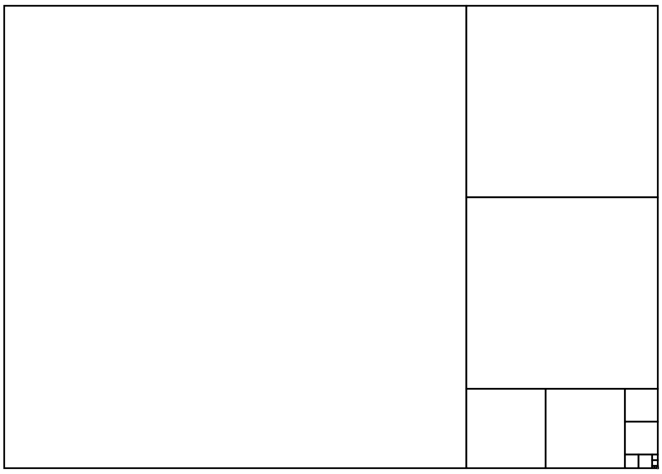

図 1.3: 縦横比が $\sqrt{2}$ の長方形

問題 1.2. 有理数の列 $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $a_n = [1, \overbrace{2, 2, \ldots, 2}^{n}]$ と定めるとき

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \sqrt{2}$$

を示せ.（ヒント：$\beta_n = 1 + a_n = [\overbrace{2, 2, \ldots, 2}^{n+1}]$ と置くとき $\lim_{n\to\infty} \beta_n = 1 + \sqrt{2}$ を示せばよい. β_n の漸化式を考えよ.）

問題 1.3. $\sqrt{3}$ と $\sqrt{7}$ の連分数展開を求めよ.