離散数学及び演習
講義 4　 2014. 5. 8（木）

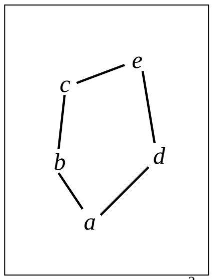
束
（教科書　pp.16-19）

教科書･･･野崎昭弘：離散系の数学、近代科学社

半順序（partial order）（復習）

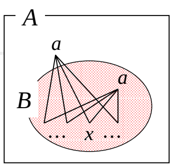
- 2 項関係 $R \subseteq A^2$ は A 上の半順序である
  - R は反射的，反対称的，かつ推移的である
- $x\,R\,y$ … $x \leq_R y$，$x \sqsubseteq_R y$
  （R の意味で y は x より大きい）
- 教科書では半順序のことを単に順序と書いている．

例： $A = \{a, b, c, d, e\}$
$R = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (b, b), (b, c), (b, e), (c, c), (c, e), (d, d), (d, e), (e, e)\}$
- R は反射的，反対称的，かつ推移的だから，R は半順序である



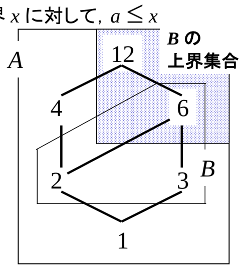
2

上界，上限（復習）



半順序集合 $(A, \leq)$，$B \subseteq A$ に対して，
- $a \in A$ は B の上界（upper bound）である
  - 任意の $x \in B$ に対して，$x \leq a$
- $a \in A$ は B の最小上界（least upper bound）（上限（supremum））である … $a = \mathrm{lub}\,B$，$\sup B$
  - a は B の上界であり，かつ，B の任意の上界 x に対して，$a \leq x$

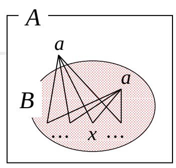
例： $(A, \leq)$：右図，$B = \{2, 3, 6\}$
- B の上界 … 6, 12
- B の上限 … 6



- 上限は上界の最小元である

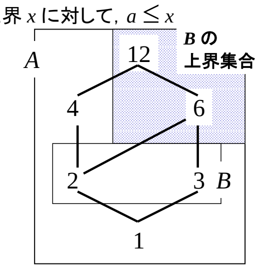
3

上界，上限（続き）



半順序集合 $(A, \leq)$，$B \subseteq A$ に対して，
- $a \in A$ は B の上界（upper bound）である
  - 任意の $x \in B$ に対して，$x \leq a$
- $a \in A$ は B の最小上界（least upper bound）（上限（supremum））である … $a = \mathrm{lub}\,B$，$\sup B$
  - a は B の上界であり，かつ，B の任意の上界 x に対して，$a \leq x$

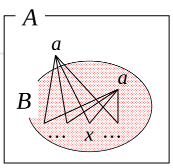
例： $(A, \leq)$：右図，$B = \{2, 3\}$
- B の上界 … 6, 12
- B の上限 … 6（$\notin B$）



- 上限は上界の最小元である

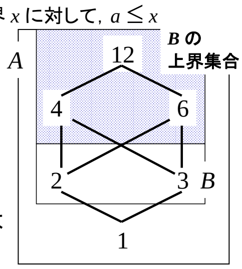
4

上界，上限（続き2）



半順序集合 $(A, \leq)$，$B \subseteq A$ に対して，
- $a \in A$ は B の上界（upper bound）である
  - 任意の $x \in B$ に対して，$x \leq a$
- $a \in A$ は B の最小上界（least upper bound）（上限（supremum））である … $a = \mathrm{lub}\,B$，$\sup B$
  - a は B の上界であり，かつ，B の任意の上界 x に対して，$a \leq x$

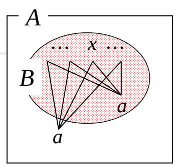
例： $(A, \leq)$：右図，$B = \{2, 3\}$
- B の上界 … 4, 6, 12
- B の上限 … なし



- 上限は上界の最小元である
- 上界が存在しても，上限が存在するとは限らない．

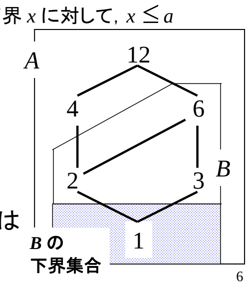
5

下界，下限（復習）



半順序集合 $(A, \leq)$，$B \subseteq A$ に対して，
- $a \in A$ は B の下界（lower bound）である
  - 任意の $x \in B$ に対して，$a \leq x$
- $a \in A$ は B の最大下界（greatest lower bound）（下限（infimum））である … $a = \mathrm{glb}\,B$，$\inf B$
  - a は B の下界であり，かつ，B の任意の下界 x に対して，$x \leq a$

例： $(A, \leq)$：右図，$B = \{2, 3, 6\}$
- B の下界 … 1
- B の下限 … 1



- 下限は下界の最大元である
- 下界が存在しても，下限が存在するとは限らない．

6

束(lattice)

- 半順序集合$(A, \leq)$は完備(complete)である
  - Aの任意の部分集合Bに対して，Bの上限と下限が存在する.
- 半順序集合$(L, \leq)$は束(lattice)である
  - Lの任意の有限部分集合Bに対して，Bの上限と下限が存在する.
  - 完備半順序集合は束であるが，束は完備であるとは限らない.
- 束$(L, \leq)$は完備束(complete lattice)である
  - $(L, \leq)$ は完備である.
- 束L
  - 半順序≤が明らかな場合は，単に，束Lという.

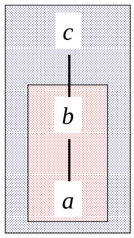
7

束(続き)

- 半順序集合$(L, \leq)$は束(lattice)である
  - Lの任意の有限部分集合Bに対して，Bの上限と下限が存在する.

例：$(\{a, b, c\}, \leq)$：右図

- $\sup \phi = a$,　$\inf \phi = c$,
- $\sup \{a\} = a$,　$\inf \{a\} = a$,
- $\sup \{b\} = b$,　$\inf \{b\} = b$,
- $\sup \{c\} = c$,　$\inf \{c\} = c$,
- $\sup \{a, b\} = b$,　$\inf \{a, b\} = a$,
- $\sup \{a, c\} = c$,　$\inf \{a, c\} = a$,
- $\sup \{b, c\} = c$,　$\inf \{b, c\} = b$,
- $\sup \{a, b, c\} = c$,　$\inf \{a, b, c\} = a$
- ゆえに，Lは束である.



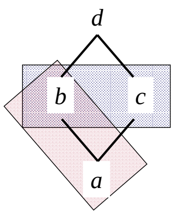
8

束(続き2)

- 半順序集合$(L, \leq)$は束(lattice)である
  - Lの任意の有限部分集合Bに対して，Bの上限と下限が存在する.

例：$(\{a, b, c, d\}, \leq)$：右図

- $\sup \phi = a$,　$\inf \phi = d$,
- $\sup \{a\} = a$,　$\inf \{a\} = a$,
- …
- $\sup \{a, b\} = b$,　$\inf \{a, b\} = a$,
- …
- $\sup \{b, c\} = d$,　$\inf \{b, c\} = a$,
- $\sup \{a, b, c\} = d$,　$\inf \{a, b, c\} = a$,
- …
- $\sup \{a, b, c, d\} = d$,　$\inf \{a, b, c, d\} = a$
- ゆえに，Lは束である.

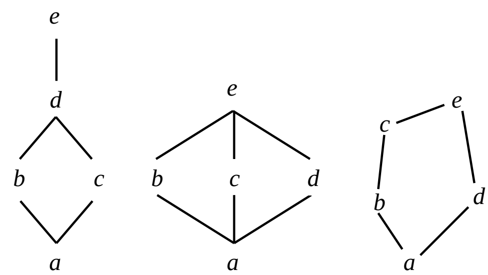


9

束(続き3)

- 半順序集合$(L, \leq)$は束(lattice)である
  - Lの任意の有限部分集合Bに対して，Bの上限と下限が存在する.

例：以下はいずれも束である.



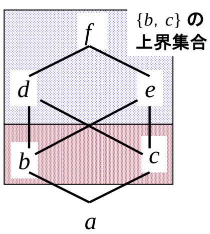
10

束(続き4)

- 半順序集合$(L, \leq)$は束(lattice)である
  - Lの任意の有限部分集合Bに対して，Bの上限と下限が存在する.

例：$(L, \leq)$：右図

- $\sup \{b, c\}$ は存在しない.
- ゆえに，Lは束ではない.



11

定理

半順序集合$(A, \leq)$は束であるとき，かつそのときに限り，
任意の$x, y \in A$に対して，$\{x, y\}$の上限と下限が存在する.

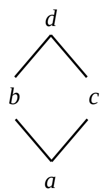
例：$(A, \leq)$：右図

上限

+	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	b	d	d
c	c	d	c	d
d	d	d	d	d

下限

·	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	b	a	b
c	a	a	c	c
d	a	b	c	d



- 任意の$x, y \in A$に対して，$\{x, y\}$の上限と下限が存在するので，Aは束である.

12

証明

半順序集合 $(A,\leq)$ は束であるとき，かつそのときに限り，
任意の $x, y\in A$ に対して，$\{x, y\}$ の上限と下限が存在する．

- a)「A が束であるならば，任意の $x, y\in A$ に対して，$\{x, y\}$ の上限と下限が存在する」と
- b)「任意の $x, y\in A$ に対して $\{x, y\}$ の上限と下限が存在するならば，A は束である」の両方を示す．

---

a)　A が束であると仮定すると，A の任意の有限部分集合 B に対して，B の上限と下限が存在する．
特に，$\{x, y\}\subseteq A$ に対して，$\{x, y\}$ の上限と下限が存在する．

13

証明（続き）

半順序集合 $(A,\leq)$ は束であるとき，かつそのときに限り，
任意の $x, y\in A$ に対して，$\{x, y\}$ の上限と下限が存在する．

- b)「任意の $x, y\in A$ に対して $\{x, y\}$ の上限と下限が存在するならば，A は束である」を示す．
- b)「任意の $x, y\in A$ に対して $\{x, y\}$ の上限と下限が存在する」を仮定して，
  「A の任意の有限部分集合 $A_n=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ に対して，A_n の上限と下限が存在する」を示す．
- b) n に関する帰納法により，「A_n の上限と下限が存在する」を示す．
  - b-1)（基底段階）「$A_1=\{a_1\}$ の上限と下限が存在する」を示す．
  - b-2)（帰納段階）「$A_k=\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ の上限と下限が存在する」を仮定して，
    「$A_{k+1}=\{a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}\}$ の上限と下限が存在する」を示す．

14

証明（続き2）

b) 任意の $x, y\in A$ に対して $\{x, y\}$ の上限と下限が存在するならば，A は束である．

- 「任意の $x, y\in A$ に対して $\{x, y\}$ の上限と下限が存在する」を仮定して，n に関する帰納法により，
  「A の任意の有限部分集合 $A_n=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ に対して，A_n の上限と下限が存在する」を示す．
  - b-1)（基底段階）「$A_1=\{a_1\}$ の上限と下限が存在する」を示す．

---

b-1)（基底段階）　$A_1=\{a_1\}$ の上限と下限はともに a_1 である．

15

証明（続き3）

b) 任意の $x, y\in A$ に対して $\{x, y\}$ の上限と下限が存在するならば，A は束である．

- 「任意の $x, y\in A$ に対して $\{x, y\}$ の上限と下限が存在する」を仮定して，n に関する帰納法により，
  「A の任意の有限部分集合 $A_n=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ に対して，A_n の上限と下限が存在する」を示す．
  - b-2)（帰納段階）「$A_k=\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ の上限と下限が存在する」を仮定して，
    「$A_{k+1}=\{a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}\}$ の上限と下限が存在する」を示す．
    - b-2-1)　「$A_{k+1}=\{a_1, a_2 \ldots, a_k, a_{k+1}\}$ の上限が存在する」と
    - b-2-2)　「$A_{k+1}=\{a_1, a_2 \ldots, a_k, a_{k+1}\}$ の下限が存在する」の両方を示す．
      - b-2-1-1)　「A_{k+1} の上界 u が存在する」を示す．
        - ・「任意の $a_i\in A_{k+1}$ に対して，$a_i\leq u$」を示す．
      - b-2-1-2)「u は A_{k+1} の最小上界である」を示す．

16

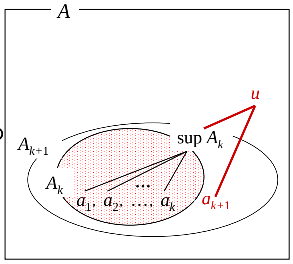
証明（続き4）

- b-2)（帰納段階）「$A_k=\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ の上限と下限が存在する」を仮定して，
  - b-2-1)　「$A_{k+1}=\{a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}\}$ の上限が存在する」を示す．
    - b-2-1-1)　「A_{k+1} の上界 u が存在する」を示す．
      - ・「任意の $a_i\in A_{k+1}$ に対して，$a_i\leq u$」を示す．

---

b-2) $A_k=\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}\subseteq A$ の上限 $\sup A_k$ が存在すると仮定する（帰納法の仮定）．
このとき，$\sup A_k\in A$,
かつ，$a_i\leq\sup A_k$ $(i=1, 2, \ldots, k)$．

b-2-1-1) $A_{k+1}=\{a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}\}\subseteq A$ とする．
任意の $x, y\in A$ に対して $\{x, y\}$ の上限が存在するから，特に，$\{\sup A_k, a_{k+1}\}$ の上限 u も存在する．
このとき，$a_i\leq\sup A_k\leq u$ $(i=1, 2, \ldots, k)$，
かつ，$a_{k+1}\leq u$．
ゆえに，u は A_{k+1} の上界である．



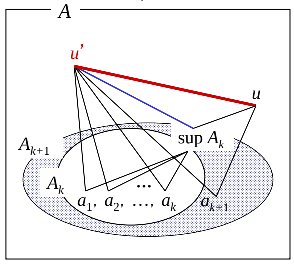
証明（続き5）

- b-2)（帰納段階）「$A_k=\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ の上限と下限が存在する」を仮定して，
  - b-2-1)　「$A_{k+1}=\{a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}\}$ の上限が存在する」を示す．
    - b-2-1-2)「u は A_{k+1} の最小上界である」を示す．
      - ・「A_{k+1} の任意の上界 u' に対して，$u\leq u'$」を示す．

---

b-2-1-2) $A_{k+1}=\{a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}\}$ の任意の上界 u' に対して，$a_i\leq u'$
$(i=1, 2, \ldots, k, k+1)$．
$A_k=\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}\subseteq A_{k+1}$ だから，
u' は A_k の上界でもある．
ゆえに，$\sup A_k\leq u'$．
$a_{k+1}\leq u'$ だから，
u' は $\{\sup A_k, a_{k+1}\}$ の上界である．
ところが，b-2-1-1) から，A_{k+1} の上界 u は $\{\sup A_k, a_{k+1}\}$ の上限だから，$u\leq u'$．

b-2-1)　ゆえに，$A_{k+1}=\{a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}\}$ の上限は存在する．



証明（続き6）

b）任意の $x, y \in A$ に対して $\{x, y\}$ の上限と下限が存在する
ならば，A は束である．

- b）「任意の $x, y \in A$ に対して $\{x, y\}$ の上限と下限が存在する」を仮定して，
「A の任意の有限部分集合 A_n に対して，A_n の上限と下限が存在する」を示す．
  - b-1）（基底段階）「$A_1 = \{a_1\}$ の上限と下限が存在する」を示す．
  - b-2）（帰納段階）「$A_k = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ の上限と下限が存在する」
  を仮定して，
  $A_{k+1} = \{a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}\}$ の上限と下限が存在する」を示す．
    - b-2-1）「$A_{k+1} = \{a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}\}$ の上限が存在する」と
    - b-2-2）「$A_{k+1} = \{a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}\}$ の下限が存在する」の両方を示す．

---

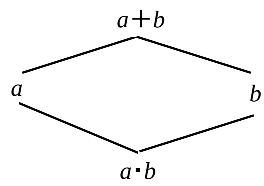
b-2-2）同様に，A_{k+1} の下限が存在することを示せる．
b-2）　ゆえに，A_{k+1} の上限と下限は存在する．
b）　以上から，A の任意の有限部分集合 A_n の上限と下限は存在する．
ゆえに，A は束である．

19

結び，交わり

束 L に対して，

- $a, b \in L$ の結び（join）　…　$a+b$，$a \cup b$
  - $\{a, b\}$の上限　（sup $\{a, b\}$）
- $a, b \in L$ の交わり（meet）　…　$a \cdot b$，$a \cap b$
  - $\{a, b\}$の下限　（inf $\{a, b\}$）

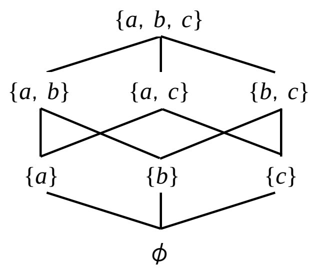


20

結び，交わり（続き）

例：　半順序集合（$\boldsymbol{P}(\{a, b, c\})$，$\subseteq$）
$A, B \in \boldsymbol{P}(\{a, b, c\})$　（$A, B \subseteq \{a, b, c\}$）

- 結び　$A+B$　＝　$\sup\{A, B\}$　＝　$A \cup B$
- 交わり $A \cdot B$　＝　$\inf\{A, B\}$　＝　$A \cap B$



21

定理

束 L と任意の $a, b, c, d \in L$ に対して，
次の（1）～（4）が成り立つ．

（1）　$a \leq b$ ならば，$a+c \leq b+c$，$a \cdot c \leq b \cdot c$
（2）　$a \leq b$ かつ $c \leq d$ ならば，$a+c \leq b+d$，$a \cdot c \leq b \cdot d$
（3）　$(a \cdot b)+(a \cdot c) \leq a \cdot (b+c)$
（4）　$a+(b \cdot c) \leq (a+b) \cdot (a+c)$

22

証明

（1）　$a \leq b$ ならば，$a+c \leq b+c$

- $a+c$ は $\{a, c\}$の上限（最小上界）
- $b+c$ は $\{a, c\}$の上界であることを示す．

明らかに，$b \leq b+c$ かつ $c \leq b+c$．
$a \leq b$ であり，$\leq$は推移的だから，$a \leq b+c$．
ゆえに，$b+c$ は $\{a, c\}$の上界である．
ところが，$a+c$ は $\{a, c\}$の上限だから，$a+c \leq b+c$．

23

定理

束 L と任意の $x, y \in L$ に対して，次の（1）～（3）は
互いに同値である．

（1）　$x \leq y$
（2）　$x+y = y$
（3）　$x \cdot y = x$

24

証明

束 L と任意の $x, y \in L$ に対して，次の(1)～(3)は互いに同値である．

(1)　$x \leq y$　(2)　$x+y=y$　(3)　$x \cdot y=x$

- a) 「(1)と(2)は同値である」と
- b) 「(1)と(3)は同値である」の両方を示す．
  - a-1)「(1)が成り立つならば，(2)も成り立つ」と
  - a-2)「(2)が成り立つならば，(1)も成り立つ」を示す．

---

a-1)　(1)が成り立つと仮定する．
このとき，明らかに，y は $\{x, y\}$ の上界である．
そこで，u を $\{x, y\}$ の任意の上界とすると，$y \leq u$．
ゆえに，y は $\{x, y\}$ の最小上界（上限）である．
したがって，(2)が成り立つ．

25

証明（続き）

束 L と任意の $x, y \in L$ に対して，次の(1)～(3)は互いに同値である．

(1)　$x \leq y$　(2)　$x+y=y$　(3)　$x \cdot y=x$

- a) 「(1)と(2)は同値である」と
- b) 「(1)と(3)は同値である」の両方を示す．
  - a-1)「(1)が成り立つならば，(2)も成り立つ」と
  - a-2)「(2)が成り立つならば，(1)も成り立つ」を示す

---

a-2)　(2)が成り立つと仮定する．
このとき，$x \leq x+y=y$ だから，(1)が成り立つ．
b)　同様に証明できる．

26

定理

束 L と任意の $x, y, z \in L$ に対して，次の(1)～(4)が成り立つ．

(1)　$x+y=y+x$,
$x \cdot y=y \cdot x$　（交換則(commutative law)）
(2)　$x+(y+z)=(x+y)+z$,
$x \cdot (y \cdot z)=(x \cdot y) \cdot z$　（結合則(associative law)）
(3)　$x+(x \cdot y)=x$,
$x \cdot (x+y)=x$　（吸収則(absorptive law)）
(4)　$x+x=x$,
$x \cdot x=x$　（冪等則(idempotent law)）

27

証明

(1)　$x+y=y+x$, $x \cdot y=y \cdot x$
(4)　$x+x=x$, $x \cdot x=x$
- ＋，・の定義から明らか．

(2)　$x+(y+z)=(x+y)+z$
- $x+(y+z)$ は $\{x+y, z\}$ の上限であることを示す．
- a) 「$x+(y+z)$ は $\{x+y, z\}$ の上界である」を示す．
  - 「$x+y \leq x+(y+z)$，$z \leq x+(y+z)$」を示す．
- b) 「$x+(y+z)$ は $\{x+y, z\}$ の最小上界である」を示す．
  - 「$\{x+y, z\}$ の任意の上界 u' に対して，$x+(y+z) \leq u'$」を示す．

$x+(y+z)=u$ とおく．
a)　u は $\{x, y+z\}$ の上限だから，$x \leq u$，$y+z \leq u$．
ゆえに，$y \leq u$，$z \leq u$．
したがって，u は $\{x, y\}$の上界であり，$x+y \leq u$．
以上から，u は $\{x+y, z\}$ の上界である．

28

証明（続き）

(2)　$x+(y+z)=(x+y)+z$
- $x+(y+z)$ は $\{x+y, z\}$ の上限であることを示す．
- 1) 「$x+(y+z)$ は $\{x+y, z\}$ の上界である」を示す．
  - 「$x+y \leq x+(y+z)$，$z \leq x+(y+z)$」を示す．
- 2) 「$x+(y+z)$ は $\{x+y, z\}$ の最小上界である」を示す．
  - 「$\{x+y, z\}$ の任意の上界 u' に対して，$x+(y+z) \leq u'$」を示す．

$x+(y+z)=u$ とおく．
b)　u' を $\{x+y, z\}$ の任意の上界とする．
このとき，$x+y \leq u'$，$z \leq u'$．さらに，$x \leq u'$，$y \leq u'$．
ゆえに，u' は $\{y, z\}$の上界であり，$y+z \leq u'$．
したがって，u' は $\{x, y+z\}$ の上界である．
ところが，u は $\{x, y+z\}$の上限だから，$u \leq u'$．
a)から，u は $\{x+y, z\}$ の上界だから，u は$\{x+y, z\}$ の上限である．

29

定理

半順序集合$(A, \leq)$が束であるならば，$(A, \leq)$は交換則，結合則，吸収則，および，

$$x \leq y \text{ iff } x+y=y$$

を満たす．

- P　iff　Q　(P　if and only if　Q)
  - Q であるとき，かつそのときに限り，P である
  - P と Q は必要十分

前の2つの定理から明らか．

30

定理

集合 A と任意の $x, y \in A$ に対して，$x+y$, $x \cdot y$ が定義されるとき，それらが吸収則を満たすならば，冪等則も満たす．

- (3)　$x+(x \cdot y)=x$,
  $x \cdot (x+y)=x$　　（吸収則（absorptive law））
- (4)　$x+x=x$,
  $x \cdot x=x$　　（冪等則（idempotent law））
- $x+y$, $x \cdot y$ が定義される
  - 任意の $x, y \in A$ に対して，$x+y$, $x \cdot y \in A$ がそれぞれ一意に定まる．

31

証明

集合 A と任意の $x, y \in A$ に対して，$x+y$, $x \cdot y$ が定義されるとき，それらが吸収則を満たすならば，冪等則も満たす．

- 吸収則「$x+(x \cdot y)=x$, $x \cdot (x+y)=x$」を仮定して，冪等則「$x+x=x$, $x \cdot x=x$」を示す．

吸収則が成り立つと仮定する．
任意の $x, y \in A$ に対して，$x+(x \cdot y)=x$ だから，
特に，y の代わりに $x+y$ を用いると，$x+(x \cdot (x+y))=x$.
$x \cdot (x+y)=x$ だから，$x+x=x$.
同様に，$x \cdot x=x$.

32

定理

集合 A と任意の $x, y \in A$ に対して，$x+y$, $x \cdot y$ が定義され，かつ，それらは交換則，結合則，吸収則を満たすとする．このとき，

$$x \leq y \ \text{ iff } \ x+y=y$$

と定義すれば，$(A, \leq)$ は束である．

- 代数系（集合とその上での演算の組）としての束
- 演算＋から半順序≤を定義

33

証明

集合 A と任意の $x, y \in A$ に対して，$x+y$, $x \cdot y$ が定義され，かつ，それらは交換則，結合則，吸収則を満たすとする．このとき，
$x \leq y$ iff $x+y=y$
と定義すれば，$(A, \leq)$ は束である．

- a)「$(A, \leq)$ は半順序集合である」を示す．
- b)「任意の $x, y \in A$ に対して，$\{x, y\}$ の上限と下限が存在する」を示す．
  - 半順序集合 $(A, \leq)$ は束であるとき，かつそのときに限り，任意の $x, y \in A$ に対して，$\{x, y\}$ の上限と下限が存在する．
  - a-1)「$\leq$ は反射的である」を示す．
  - a-2)「$\leq$ は反対称的である」を示す．
  - a-3)「$\leq$ は推移的である」を示す．

34

証明（続き）

集合 A と任意の $x, y \in A$ に対して，$x+y$, $x \cdot y$ が定義され，かつ，それらは交換則，結合則，吸収則を満たすとする．このとき，
$x \leq y$ iff $x+y=y$
と定義すれば，$(A, \leq)$ は束である．

- a)「$(A, \leq)$ は半順序集合である」を示す．
  - a-1)「$\leq$ は反射的である」を示す．
  - a-1)「任意の $x \in A$ に対して，$x \leq x$」を示す．
  - a-1)「任意の $x \in A$ に対して，$x+x=x$」を示す．

---

a-1)　集合 A と任意の $x, y \in A$ に対して，吸収則が成り立つから，
冪等則も成り立つ．
任意の $x \in A$ に対して，冪等則から，$x+x=x$.
ゆえに，$x \leq x$ だから，$\leq$ は反射的である．

35

証明（続き2）

集合 A と任意の $x, y \in A$ に対して，$x+y$, $x \cdot y$ が定義され，かつ，それらは交換則，結合則，吸収則を満たすとする．このとき，
$x \leq y$ iff $x+y=y$
と定義すれば，$(A, \leq)$ は束である．

- a)「$(A, \leq)$ は半順序集合である」を示す．
  - a-2)「$\leq$ は反対称的である」を示す．
  - a-2)「任意の $x, y \in A$ に対して，$x \leq y$ かつ $y \leq x$ ならば，$x=y$」を示す．

---

a-2)　任意の $x, y \in A$ に対して，$x \leq y$ かつ $y \leq x$ と仮定する．
このとき，$x+y=y$ かつ $y+x=x$.
交換則から，$x+y=y+x$ だから，$x=y$.
ゆえに，$\leq$ は反対称的である．

36

証明(続き3)

集合 A と任意の $x, y \in A$ に対して, $x+y$, $x \cdot y$ が定義され，かつ，
それらは交換則，結合則，吸収則を満たすとする．このとき，
$x \leq y$ iff $x+y=y$
と定義すれば，$(A, \leq)$は束である．

- a)「$(A, \leq)$は半順序集合である」を示す．
  - a-3)「$\leq$は推移的である」を示す．
  - a-3)「任意の $x, y, z \in A$ に対して，$x \leq y$ かつ $y \leq z$ ならば，$x \leq z$」を示す．

a-3) 任意の $x, y, z \in A$ に対して，$x \leq y$ かつ $y \leq z$ と仮定する．
このとき，$x+y = y$ かつ $y+z = z$.
ゆえに，$z = y+z = (x+y)+z$.
結合則から，$(x+y)+z = x+(y+z)$ だから，$z = x+(y+z) = x+z$.
ゆえに，$x \leq z$ だから，$\leq$は推移的である．

37

証明(続き4)

集合 A と任意の $x, y \in A$ に対して, $x+y$, $x \cdot y$ が定義され，かつ，
それらは交換則，結合則，吸収則を満たすとする．このとき，
$x \leq y$ iff $x+y=y$
と定義すれば，$(A, \leq)$は束である．

- b)「任意の $x, y \in A$ に対して，$\{x, y\}$ の上限と下限が存在する」を示す．
  - b-1)「任意の $x, y \in A$ に対して，$\{x, y\}$の上限が存在する」と
  - b-2)「任意の $x, y \in A$ に対して，$\{x, y\}$の下限が存在する」を示す．
    - b-1-1) 「$x+y$ が $\{x, y\}$の上界である」を示す．
    - b-1-2) 「$x+y$ は $\{x, y\}$ の最小上界である」を示す．
      - b-1-1-1)「$x \leq x+y$」と
      - b-1-1-2)「$y \leq x+y$」の両方を示す．

b-1-1-1) 任意の $x, y \in A$ に対して，
$x+y = (x+x)+y$ (冪等則)
$= x+(x+y)$ (結合則)
ゆえに，$x \leq x+y$.

38

証明(続き5)

集合 A と任意の $x, y \in A$ に対して, $x+y$, $x \cdot y$ が定義され，かつ，
それらは交換則，結合則，吸収則を満たすとする．このとき，
$x \leq y$ iff $x+y=y$
と定義すれば，$(A, \leq)$は束である．

- b-1) 「任意の $x, y \in A$ に対して，$\{x, y\}$ の上限が存在する」を示す．
  - b-1-1) 「$x+y$ が $\{x, y\}$の上界である」を示す．
    - b-1-1-1)「$x \leq x+y$」と
    - b-1-1-2)「$y \leq x+y$」の両方を示す．

b-1-1-2) 任意の $x, y \in A$ に対して，
$x+y = y+x$ (交換則)
$= (y+y)+x$ (冪等則)
$= y+(y+x)$ (結合則)
$= y+(x+y)$ (交換則)
ゆえに，$y \leq x+y$.
b-1-1) ゆえに，$x+y$ は $\{x, y\}$の上界である．

39

証明(続き6)

集合 A と任意の $x, y \in A$ に対して, $x+y$, $x \cdot y$ が定義され，かつ，
それらは交換則，結合則，吸収則を満たすとする．このとき，
$x \leq y$ iff $x+y=y$
と定義すれば，$(A, \leq)$は束である．

- b-1) 「任意の $x, y \in A$ に対して，$\{x, y\}$ の上限が存在する」を示す．
  - b-1-1) 「$x+y$ が $\{x, y\}$の上界である」を示す．
  - b-1-2) 「$x+y$ は $\{x, y\}$ の最小上界である」を示す．
    - 「$\{x, y\}$ の任意の上界 u に対して，$x+y \leq u$」を示す．

b-1-2) $\{x, y\}$ の任意の上界 u に対して，$x \leq u$, $y \leq u$.
ゆえに，$\leq$の定義から，$x+u = u$, $y+u = u$.
ここで，$(x+y)+u = x+(y+u) = x+u = u$ だから，$x+y \leq u$.
したがって，$x+y$ は$\{x, y\}$ の最小上界である．
b-1) 以上から，任意の $x, y \in A$ に対して，$\{x, y\}$ の上限が存在する．
b-2) 同様に，任意の $x, y \in A$ に対して，$\{x, y\}$ の下限が存在する．
a)，b)から，$(A, \leq)$は束である．

40

定理(まとめ)

半順序集合$(A, \leq)$に関して，次の(1)～(3)は互いに同値である．
(1) $(A, \leq)$は束である
(A の任意の有限部分集合に上限と下限が存在する)．
(2) 任意の $x, y \in A$ に対して，$\{x, y\}$の上限と下限が存在する．
(3) 任意の $x, y \in A$ に対して，$x+y$, $x \cdot y$ が定義され，かつ，
それらは交換則，結合則，吸収則，および，
$x \leq y$ iff $x+y=y$
を満たす．

- (2)，(3)を束の定義とする場合もある．

41

まとめ

- 今回の講義
  - 束
- 次回の講義
  - 関数(教科書 pp.3-5，26-28)
- 今回の演習
  - 同値関係

42