離散数学及び演習
講義 3　 2014. 5. 1（木）

同値関係
半順序
（教科書　pp.12-16, 19-23）

教科書･･･野崎昭弘：離散系の数学、近代科学社

2 項関係の性質（復習）

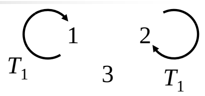
2 項関係 $R \subseteq A^2$

- R は反射的（reflexive）である
  - 任意の $x \in A$ に対して，$(x, x) \in R$
- R は対称的（symmetric）である
  - 任意の $x, y \in A$ に対して，$(x, y) \in R$ ならば $(y, x) \in R$
- R は反対称的（antisymmetric）である
  - 任意の $x, y \in A$ に対して，$(x, y) \in R$ かつ $(y, x) \in R$ ならば，$x = y$
- R は推移的（transitive）である
  - 任意の $x, y, z \in A$ に対して，$(x, y) \in R$ かつ $(y, z) \in R$ ならば，$(x, z) \in R$

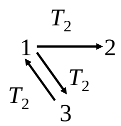
2

対称的な関係・反対称的な関係

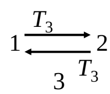
例：　$A = \{1, 2, 3\}$



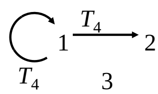
- $T_1 = \{(1, 1), (2, 2)\}$
  - T_1 は対称的かつ反対称的である．



- $T_2 = \{(1, 2), (1, 3), (3, 1)\}$
  - T_2 は対称的でも反対称的でもない．（$1 \neq 3$）



- $T_3 = \{(1, 2), (2, 1)\}$
  - T_3 は対称的であり，反対称的でない．（$1 \neq 2$）



- $T_4 = \{(1, 1), (1, 2)\}$
  - T_4 は対称的でなく，反対称的である．

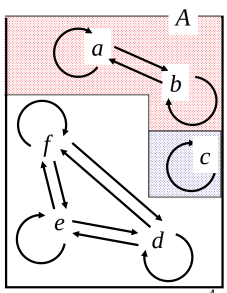
3

同値関係（equivalence relation）

- 2 項関係 $R \subseteq A^2$ は A 上の同値関係である
  - R は反射的，対称的，かつ推移的である
- $x\,R\,y$　…　$x \equiv_R y$，$x \sim_R y$
  （R の意味で x と y は等しい）

例：　$A = \{a, b, c, d, e, f\}$
$R = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, c), (d, d), (d, e), (d, f), (e, d), (e, e), (e, f), (f, d), (f, e), (f, f)\}$

- R は反射的，対称的，かつ推移的だから，R は同値関係である



4

同値関係（続き）

- 2 項関係 $R \subseteq A^2$ は A 上の同値関係である
  - R は反射的，対称的，かつ推移的である
- 例：　A：　平面上のすべての三角形からなる集合
  $R = \{(x, y) \mid x$ と y は相似$\} \subseteq A^2$
  - R は反射的，対称的，かつ推移的だから，R は同値関係である．
- 例：　$R = \{(m, n) \mid m$ と n は 3 で割った余りが等しい$\} \subseteq \mathbf{N}^2$
  - $1\,R\,4$，$1\,R\,7$，…$2\,R\,5$，$2\,R\,8$，…，$3\,R\,6$，$3\,R\,9$，…
  - R は反射的，対称的，かつ推移的だから，R は同値関係である．
  - $m\,R\,n$　…　$m \equiv_R n$，　$m \equiv_3 n$，　$m \equiv n \pmod 3$
    （m と n は 3 を法（modulo）として等しい（合同である））

5

整数を法とする合同関係

$\mathbf{Z}$ … すべての整数（integer，ganze Zahl）からなる集合

- 整数 p を法（modulo）とする合同関係 $\equiv_p$
  - $\equiv_p = \{(m, n) \mid m$ と n は p で割ったときの余りが等しい$\}$ （$\subseteq \mathbf{Z}^2$）
    - ある $d_1, d_2 \in \mathbf{Z}$ に対して，$m = d_1 \cdot p + r$，$n = d_2 \cdot p + r$ だから，$m - n = (d_1 - d_2) \cdot p$，$d_1 - d_2 \in \mathbf{Z}$
  - $\equiv_p = \{(m, n) \mid m - n$ は p の倍数である$\}$
    $= \{(m, n) \mid$ ある $d \in \mathbf{Z}$ に対して，$m - n = d \cdot p\}$
  - $m \equiv_p n$，　$m \equiv n \pmod p$
    （m と n は p を法として等しい（合同である））

例：

- $365 \equiv_7 1$，　　$365 \equiv 1 \pmod 7$
- $1000 \equiv_{13} -1$，　$1000 \equiv -1 \pmod{13}$

6

定理

整数 p を法とする合同関係 $\equiv_p$ は，$\mathbf{Z}$ 上の同値関係である．

証明

整数 p を法とする合同関係 $\equiv_p$ は，$\mathbf{Z}$ 上の同値関係である．

- $\equiv_p$ は反射的，対称的，かつ推移的であることを示す．
  - a)「任意の $m \in \mathbf{Z}$ に対して，$m \equiv_p m$」を示す．
  - b)「任意の $m, n \in \mathbf{Z}$ に対して，$m \equiv_p n$ ならば $n \equiv_p m$」を示す．
  - c)「任意の $m, n, k \in \mathbf{Z}$ に対して，$m \equiv_p n$ かつ $n \equiv_p k$ ならば，$m \equiv_p k$」を示す．

---

a)　任意の $m \in \mathbf{Z}$ に対して，$m - m = 0 \cdot p$ だから，$m \equiv_p m$．

b)　任意の $m, n \in \mathbf{Z}$ に対して，$m \equiv_p n$ と仮定する．
このとき，ある $d \in \mathbf{Z}$ に対して，$m - n = d \cdot p$ だから，$n - m = (-d) \cdot p$．
$-d \in \mathbf{Z}$ だから，$n \equiv_p m$．

c)　任意の $m, n, k \in \mathbf{Z}$ に対して，$m \equiv_p n$ かつ $n \equiv_p k$ と仮定する．
ゆえに，ある $d, d' \in \mathbf{Z}$ に対して，$m - n = d \cdot p$ かつ $n - k = d' \cdot p$．
このとき，$m - k = (m - n) + (n - k) = (d + d') \cdot p$．
$d + d' \in \mathbf{Z}$ だから，$m \equiv_p k$．

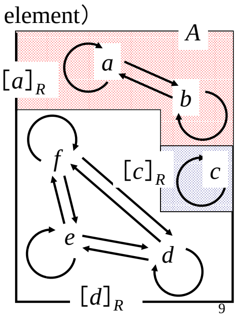
以上から，$\equiv_p$ は反射的，対称的，かつ推移的だから，$\equiv_p$ は同値関係である．

同値類(equivalent class)

- 集合 A 上の同値関係 R による $a \in A$ の同値類 $[a]_R$
  - $[a]_R = \{ x \in A \mid (a, x) \in R \}$
    $= \{ x \in A \mid a \equiv_R x \}$
  - a … $[a]_R$ の代表元(representative element)

例：

- $[a]_R = [b]_R = \{ a, b \}$
- $[c]_R = \{ c \}$
- $[d]_R = [e]_R = [f]_R = \{ d, e, f \}$

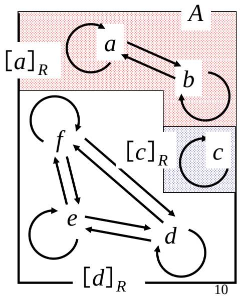


同値分割(equivalent partition)

- 集合 A 上の同値関係 R による A の同値分割 A / R
  (同値類系，商集合(quotient set))
  - $A / R = \{ [x]_R \mid x \in A \}$
    - R によるすべての同値類からなる集合

例：$[a]_R = [b]_R = \{ a, b \}$
$[c]_R = \{ c \}$
$[d]_R = [e]_R = [f]_R = \{ d, e, f \}$

- $A / R = \{ [a]_R, [b]_R, [c]_R, [d]_R, [e]_R, [f]_R \}$
  $= \{ [a]_R, [c]_R, [d]_R \}$
  $= \{\{a, b\}, \{c\}, \{d, e, f\}\}$



同値分割(続き)

- 集合 A 上の同値関係 R による A の同値分割 A / R
  - $A / R = \{ [x]_R \mid x \in A \}$

例：$R = \{ (x, y) \mid x$ と y は 3 で割った余りが等しい $\} \subseteq \mathbf{N}^2$

- $[1]_R = [4]_R = [7]_R = \dots = \{ 1, 4, 7, \dots \}$
  $[2]_R = [5]_R = [8]_R = \dots = \{ 2, 5, 8, \dots \}$
  $[3]_R = [6]_R = [9]_R = \dots = \{ 3, 6, 9, \dots \}$
- $\mathbf{N} / R = \{ [1]_R, [2]_R, [3]_R \}$
  $= \{\{ 1, 4, 7, \dots \},$
  $\{ 2, 5, 8, \dots \},$
  $\{ 3, 6, 9, \dots \}\}$

$\mathbf{N}$

$[1]_R$	1	4	7	10	…
$[2]_R$	2	5	8	11	…
$[3]_R$	3	6	9	12	…

集合の分割(partition)

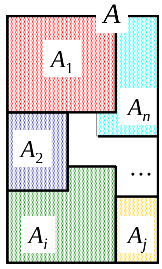
- 集合 $A (\neq \phi)$ の分割(直和分割) π
  - 次の(1)～(3)を満たす集合のクラス $\pi = \{ A_1, \dots, A_n \}$

  (1)　任意の $A_i \in \pi$ に対して，$A_i \neq \phi$．

  (2)　$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A$．

  (3)　任意の $A_i, A_j \in \pi$ に対して，
  $A_i \neq A_j$ ならば $A_i \cap A_j = \phi$．

  - A を互いに素な非空部分集合に分けること
  - $A_1, \dots, A_n$ … 分割 π のブロック



離散数学及び演習　講義3

定理

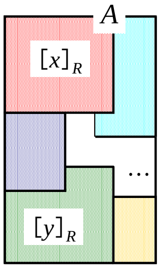
集合 A（$\neq \phi$）上の同値関係 R による A の同値分割 A/R は，A の分割である.

- A/R が条件(1)～(3)を満たすことを示す.

(1)　任意の$[x]_R \in A/R$ に対して，$[x]_R \neq \phi$.

(2)　$\bigcup_{x\in A} [x]_R = A$.

(3)　任意の$[x]_R$, $[y]_R \in A/R$に対して，
　$[x]_R \neq [y]_R$ ならば $[x]_R \cap [y]_R = \phi$.

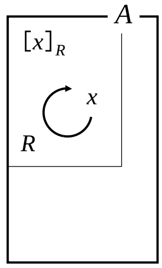


13

証明

(1)　任意の$[x]_R \in A/R$ に対して，$[x]_R \neq \phi$.

R は同値関係だから反射的であり，任意の $x \in A$ に対して，
$(x, x) \in R$.
ゆえに，$x \in [x]_R$.
$A \neq \phi$だから，$x \in A$ は必ず存在する.
したがって，$[x]_R \neq \phi$.



14

証明(続き)

(2)　$\bigcup_{x\in A} [x]_R = A$

- 1)「$\bigcup_{x\in A} [x]_R \subseteq A$」と
- 2)「$A \subseteq \bigcup_{x\in A} [x]_R$」の両方を示す.
- 1)「任意の $y \in \bigcup_{x\in A}[x]_R$に対して，$y \in A$」と
- 2)「任意の $y \in A$ に対して，$y \in \bigcup_{x\in A}[x]_R$」を示す.

---

1) 任意の $y \in \bigcup_{x\in A}[x]_R$に対して，ある$x'$が存在して，$y \in [x']_R$.
　このとき，$(x', y) \in R \subseteq A^2$ だから，$y \in A$.
　ゆえに，$\bigcup_{x\in A} [x]_R \subseteq A$.
2) 任意の $y \in A$ に対して，R は反射的だから $(y, y) \in R$.
　$y \in [y]_R \subseteq \bigcup_{x\in A} [x]_R$だから，$A \subseteq \bigcup_{x\in A} [x]_R$.
1)，2)から，$\bigcup_{x\in A} [x]_R = A$.

15

証明(続き2)

(3)　任意の$[x]_R$, $[y]_R \in A/R$ に対して，
　$[x]_R \neq [y]_R$ ならば $[x]_R \cap [y]_R = \phi$.

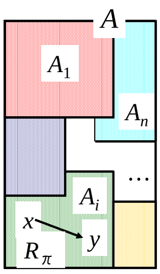
- 「$[x]_R \cap [y]_R \neq \phi$ ならば $[x]_R = [y]_R$」(対偶)を示す.
  - 「$[x]_R \cap [y]_R \neq \phi$」を仮定して，
    「$[x]_R \subseteq [y]_R$」かつ「$[y]_R \subseteq [x]_R$」を示す.

$[x]_R \cap [y]_R \neq \phi$と仮定する. このとき，ある $a \in [x]_R \cap [y]_R$ が存在する.
ゆえに，$a \in [x]_R$ かつ $a \in [y]_R$だから，$(x, a) \in R$ かつ $(y, a) \in R$.
R は対称的だから，$(a, x) \in R$.
さらに，R は推移的だから，$(y, x) \in R$.
1) 任意の $z \in [x]_R$に対して，$(x, z) \in R$.
　R は推移的だから，$(y, z) \in R$.
　ゆえに，$z \in [y]_R$だから，$[x]_R \subseteq [y]_R$.
2) 同様に，$[y]_R \subseteq [x]_R$.
1)，2)から，$[x]_R = [y]_R$.

16

分割が定める同値関係

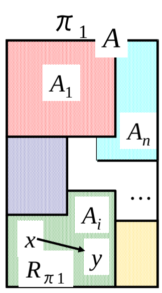
- 集合 A の分割$\pi = \{ A_1, \ldots, A_n \}$ が定める A 上の同値関係 R_π
  - $R_\pi = \{ (x, y) \mid$ ある$A_i \in \pi$が存在して，$x, y \in A_i \}$
  - $(x, y) \in R_\pi$
    … π の同じブロックに属している
- R_πは反射的，対称的，かつ推移的(すなわち，同値関係)である.

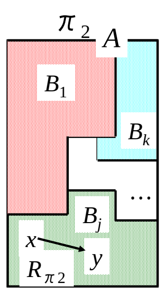


17

分割の細分(refinement)

- 集合 A の分割 π_1，π_2 に対して，π_1はπ_2の細分である.
  - π_1，π_2がそれぞれ定める A 上の同値関係 $R_{\pi 1}$，$R_{\pi 2}$に対して，$R_{\pi 1} \subseteq R_{\pi 2}$.
  - 任意の $x, y \in A$ に対して，$(x, y) \in R_{\pi 1}$ならば $(x, y) \in R_{\pi 2}$.
  - π_1はπ_2より細かい
  - π_2はπ_1より粗い





18

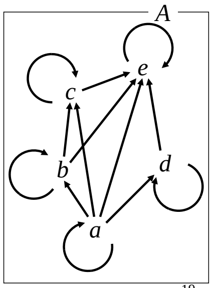
半順序(partial order)

- 2 項関係 $R \subseteq A^2$ は A 上の半順序である
  - R は反射的，反対称的，かつ推移的である
- $x\,R\,y$ … $x \leq_R y$，$x \sqsubseteq_R y$
  （R の意味で y は x より大きい）
- 教科書では半順序のことを単に順序と呼んでいる．

例：$A = \{ a, b, c, d, e \}$

$R = \{ (a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (b, b), (b, c), (b, e), (c, c), (c, e), (d, d), (d, e), (e, e) \}$

- R は反射的，反対称的，かつ推移的だから，R は半順序である



半順序(続き)

- 2 項関係 $R \subseteq A^2$ は A 上の半順序である
  - R は反射的，反対称的，かつ推移的である

例：$R = \{ (m, n) \mid m$ は n を割り切る(n は m の倍数) $\} \subseteq \mathbf{N}^2$
$= \{ (m, n) \mid$ ある $d \in \mathbf{N}$ が存在して，$n = d \cdot m \}$
$= \{ (1, 1), (1, 2), (1, 3), \ldots, (2, 2), (2, 4), (2, 6), \ldots, (3, 3), (3, 6), (3, 9), \ldots \}$

- 任意の $m \in \mathbf{N}$ に対して，$m = 1 \cdot m$ だから，R は反射的である．
- 任意の $m, n \in \mathbf{N}$ に対して，$m\,R\,n$ かつ $n\,R\,m$ と仮定する．
  このとき，ある $d, d' \in \mathbf{N}$ に対して，$n = d \cdot m$ かつ $m = d' \cdot n$.
  ゆえに，$m = d' \cdot (d \cdot m)$だから，$d' \cdot d = 1$.
  $d, d' \in \mathbf{N}$ だから，$d = d' = 1$.
  ゆえに，$n = m$ だから，R は反対称的である．
- 任意の $m, n, k \in \mathbf{N}$ に対して，$m\,R\,n$ かつ $n\,R\,k$ と仮定する．
  このとき，ある $d, d' \in \mathbf{N}$ に対して，$n = d \cdot m$ かつ $k = d' \cdot n$.
  ゆえに，$k = d' \cdot (d \cdot m) = (d' \cdot d) \cdot m$.
  $d' \cdot d \in \mathbf{N}$ だから，$m\,R\,k$. ゆえに，R は推移的である．

半順序(続き2)

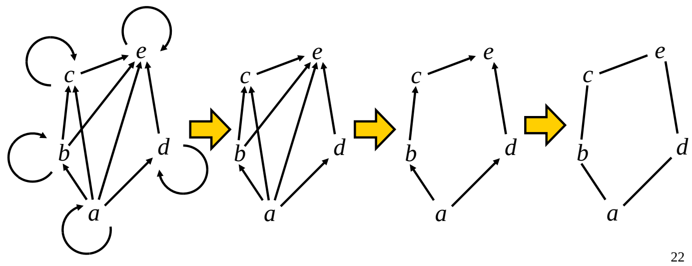
- 2 項関係 $R \subseteq A^2$ は A 上の半順序である
  - R は反射的，反対称的，かつ推移的である

例：$(m, n) \in \mathbf{N}^2$ … 英語の得点と数学の得点の対
$(m_1, n_1) \leq_R (m_2, n_2)$ iff $m_1 \leq m_2$ かつ $n_1 \leq n_2$
… 英語と数学の両方の得点が多い方が席次が上位

- $(50, 80) \leq_R (80, 100)$
- $(50, 80)$ と $(80, 50)$ の間に順序は付かない
- R は反射的，反対称的，かつ推移的だから，半順序である．
  - 半順序では，すべての要素の間に順序が付いているとは限らない．
- $R = \{ ((m_1, n_1), (m_2, n_2)) \mid m_1 \leq m_2$ かつ $n_1 \leq n_2 \} \subseteq (\mathbf{N}^2)^2$
  - $((50, 80), (80, 100)) \in R$
  - $((50, 80), (80, 50)) \notin R$

Hasse 図

- 半順序のグラフ表現における約束
  - 半順序は反射的かつ推移的
    - それらを表す矢印を省略
  - 半順序は反対称的
    - 矢印は上向きと約束し，矢を省略



全順序(total order)

- 2 項関係 $R \subseteq A^2$ に対して，x と y ($x, y \in A$) は比較可能(comparable)である
  - $(x, y) \in R$ または $(y, x) \in R$
- 2 項関係 $R \subseteq A^2$ は A 上の全順序(total order)である
  - R は A 上の半順序であり，かつ，任意の $x, y \in A$ に対して，x と y は比較可能である

例：大小関係 $\leq$ は $\mathbf{N}$ 上の全順序である．

- $\leq$ は $\mathbf{N}$ 上の半順序であり，かつ，任意の $m, n \in \mathbf{N}$ に対して，m と n は比較可能である．

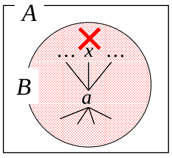
順序集合(ordered set)

- 対(A, R)は半順序集合(partial order set)である
  - 2 項関係 R は A 上の半順序である
- 対(A, R)は全順序集合(total order set)である
  - 2 項関係 R は A 上の全順序である

極大元・極小元

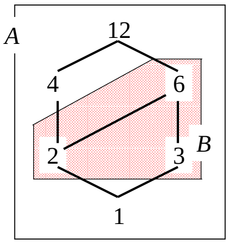
半順序集合$(A,\leq)$，$B\subseteq A$ に対して，

- $a\in B$ は B の極大元(maximal element)である
  - $a\leq x$ かつ $a\neq x$ であるような $x\in B$ は存在しない
- $a\in B$ は B の極小元(minimal element)である
  - $x\leq a$ かつ $a\neq x$であるような $x\in B$ は存在しない



例：$(A,\leq)$：右図，$B=\{2, 3, 6\}$
- B の極大元 … 6
- B の極小元 … 2, 3

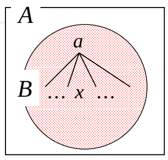
- 極大(小)元は複数存在することがある
- 異なる 2 つの極大(小)元は比較可能でない



最大元・最小元

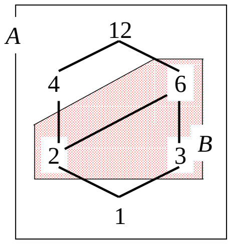
半順序集合$(A,\leq)$，$B\subseteq A$ に対して，

- $a\in B$ は B の最大元(maximum element)である … $a=\max B$
  - 任意の $x\in B$ に対して，$x\leq a$
- $a\in B$ は B の最小元(minimum element)である … $a=\min B$
  - 任意の $x\in B$ に対して，$a\leq x$



例：$(A,\leq)$：右図，$B=\{2, 3, 6\}$
- B の最大元 … 6
- B の最小元 … 存在しない

- 最大(小)元は存在するとは限らない
- 最大(小)元は存在すれば唯一である



定理

半順序集合$(A,\leq)$に対して，$B\subseteq A$ の最大(小)元は，存在すれば唯一である

証明

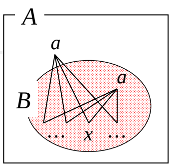
半順序集合$(A,\leq)$に対して，$B\subseteq A$ の最大(小)元は，存在すれば唯一である
- 最大元は唯一でないと仮定して，矛盾を導く.
  - 最大元は 2 つ存在すると仮定して，それらが同一であることを示す.

B の最大元は 2 つ存在すると仮定する.
そこで，b_1, $b_2\in B$ ($b_1\neq b_2$)を B の最大元とする.
b_1 は最大元だから，任意の $x\in B$ に対して，$x\leq b_1$. 特に，$b_2\leq b_1$.
b_2 も最大元だから，任意の $x\in B$ に対して，$x\leq b_2$. 特に，$b_1\leq b_2$.
ところが，$\leq$は半順序だから反対称的である.
ゆえに，$b_1=b_2$. これは矛盾.
すなわち，B の最大元は，存在すれば唯一である.
同様に，B の最小元は，存在すれば唯一である.

上界，上限

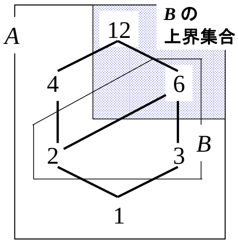
半順序集合$(A,\leq)$，$B\subseteq A$ に対して，

- $a\in A$ は B の上界(upper bound)である
  - 任意の $x\in B$ に対して，$x\leq a$
- $a\in A$ は B の最小上界(least upper bound)(上限(supremum))である … $a=\mathrm{lub}\, B$, $\sup B$
  - a は B の上界であり，かつ，B の任意の上界 x に対して，$a\leq x$



例：$(A,\leq)$：右図，$B=\{2, 3, 6\}$
- B の上界 … 6, 12
- B の上限 … 6

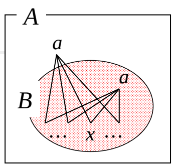
- 上限は上界集合の最小元である



上界，上限(続き)

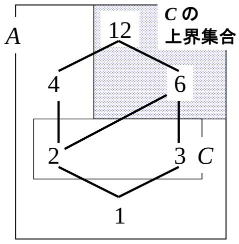
半順序集合$(A,\leq)$，$B\subseteq A$ に対して，

- $a\in A$ は B の上界(upper bound)である
  - 任意の $x\in B$ に対して，$x\leq a$
- $a\in A$ は B の最小上界(least upper bound)(上限(supremum))である … $a=\mathrm{lub}\, B$, $\sup B$
  - a は B の上界であり，かつ，B の任意の上界 x に対して，$a\leq x$

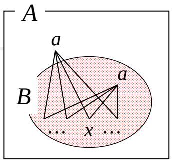


例：$(A,\leq)$：右図，$C=\{2, 3\}$
- C の上界 … 6, 12
- C の上限 … 6 ($\notin C$)

- 上限は上界集合の最小元である



上界，上限（続き2）

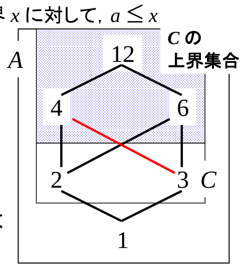


半順序集合$(A,\leq)$，$B\subseteq A$ に対して，

- $a\in A$ は B の上界（upper bound）である
  - 任意の $x\in B$ に対して，$x\leq a$
- $a\in A$ は B の最小上界（least upper bound）（上限（supremum））である　…　$a=\mathrm{lub}\,B$,　$\sup B$
  - a は B の上界であり，かつ，B の任意の上界 x に対して，$a\leq x$

例：$(A,\leq)$：右図，$C=\{2, 3\}$

- C の上界　…　4, 6, 12
- C の上限　…　なし



- 上限は上界集合の最小元である
- 上界が存在しても，上限が存在するとは限らない．

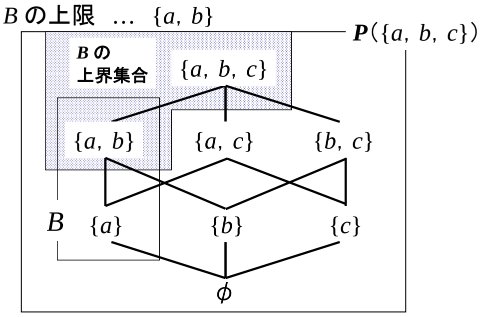
31

上界，上限（続き3）

例：半順序集合$(\boldsymbol{P}(\{a, b, c\}), \subseteq)$

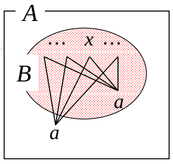
$B=\{\{a\}, \{a, b\}\}$

- B の上界　…　$\{a, b\}$, $\{a, b, c\}$
- B の上限　…　$\{a, b\}$



32

下界，下限

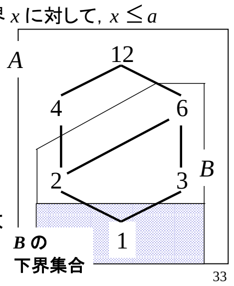


半順序集合$(A,\leq)$，$B\subseteq A$ に対して，

- $a\in A$ は B の下界（lower bound）である
  - 任意の $x\in B$ に対して，$a\leq x$
- $a\in A$ は B の最大下界（greatest lower bound）（下限（infimum））である　…　$a=\mathrm{glb}\,B$,　$\inf B$
  - a は B の下界であり，かつ，B の任意の下界 x に対して，$x\leq a$

例：$(A,\leq)$：右図，$B=\{2, 3, 6\}$

- B の下界　…　1
- B の下限　…　1



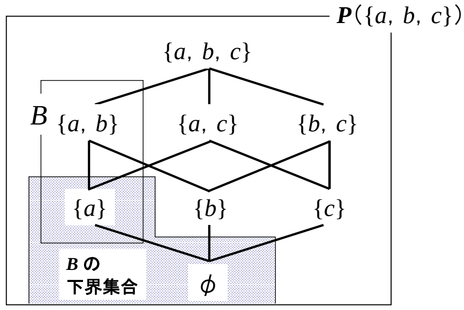
- 下限は下界集合の最大元である
- 下界が存在しても，下限が存在するとは限らない．

33

下界，下限（続き）

例：半順序集合$(\boldsymbol{P}(\{a, b, c\}), \subseteq)$，$B=\{\{a\}, \{a, b\}\}$

- B の下界　…　$\{a\}$, ϕ
- B の下限　…　$\{a\}$



34

定理

半順序集合$(A,\leq)$，$B\subseteq A$ に対して，次の(1)，(2)が成り立つ．

(1)　$\sup B\in B$ ならば，$\sup B=\max B$.

(2)　$\inf B\in B$ ならば，$\inf B=\min B$.

35

まとめ

- 今回の講義
  - 同値関係
  - 半順序
- 次回の講義
  - 束（教科書　pp.16-19）
- 今回の演習
  - 2 項関係の性質

36