平成 24 年度 幾何学要論 I 演習問題

講義ではおもに $\mathbb{R}^3$ 内の曲線 (空間曲線) を扱うが, 演習問題は $\mathbb{R}^2$ 内の曲線 (平面曲線) から始める. 多くの定義は, 空間曲線の場合と同様であるので, 異なる点のみ述べておく. (講義では, 速度ベクトル, 速さ (速度), 長さ・弧長パラメータは, $\mathbb{R}^n$ 内の曲線に対して定義した.)

$\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2;\ t \mapsto (x(t), y(t))$ を平面曲線とする. γ の単位接ベクトルを $\mathbf{e}(t) = \mathbf{e}_1(t) = \dfrac{\gamma'(t)}{||\gamma'(t)||}$ によって定義することも, 空間曲線の場合と同様である. 一方, 単位法ベクトルは, 単位接ベクトル $\mathbf{e}(t)$ を反時計回りに 90° 回転したもの, すなわち

$$\mathbf{n}(t) = \mathbf{e}_2(t) = \frac{1}{||\gamma'(t)||}(-y'(t), x'(t))$$

として定義される.

平面曲線が, その取り扱いにおいて空間曲線と大きく異なる点は, 曲率が符号付きで定義されることである. 演習問題 $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ は, 平面曲線の曲率の定義に関するものである.

以下, C は曲線 γ の像を表す.

$\boxed{1}$ 平面曲線 $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2;\ s \mapsto (x(s), y(s))$ のパラメータは弧長パラメータであるとする. このとき, $\mathbf{e}(s) = \gamma'(s) = (x'(s), y'(s))$, $\mathbf{n}(s) = (-y'(s), x'(s))$ である.

(1) $\mathbf{e}'(s)$ は $\mathbf{e}(s)$ に直交することを示せ.

(1) により, $\mathbf{e}'(s)$ は $\mathbf{n}(s)$ に平行であり, したがって $\mathbf{e}'(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s)$ と書ける. $\kappa(s)$ のことを平面曲線 C の点 $\gamma(s)$ における**曲率**という.

(2) 直線, および半径 r の円を弧長パラメータによってパラメータ付けて, それらのの曲率がそれぞれ 0, および $\pm 1/r$ であることを確かめよ. 円の曲率の符号はどのようなときにマイナスになるか? 説明せよ.

(3) $\mathbf{n}'(s) = -\kappa(s)\mathbf{e}(s)$ を示せ.

(3) により,

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix} \mathbf{e}(s) \\ \mathbf{n}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(s) \\ -\kappa(s) & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{e}(s) \\ \mathbf{n}(s) \end{pmatrix}$$

(フルネ・セレの公式の平面曲線版) が得られる.

(4) $|\kappa|$ は曲線 γ の空間曲線としての曲率に一致することを確かめよ.

(5) 単位接ベクトル $\mathbf{e}(s)$ が x 軸となす角度を $\theta(s)$ で表す. このとき, $\kappa(s) = \theta'(s)$ を示せ.

$\boxed{2}$ $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2;\ t \mapsto (x(t), y(t))$ を平面曲線とする (t は弧長パラメータとは限らない). $s = s(t)$ を $\gamma(0)$ から $\gamma(t)$ までの γ の曲線弧の長さとし, $t = t(s)$ をその逆関数とする.

$\widetilde{\gamma}(s) = \gamma((t(s))$ とおくと, $\widetilde{\gamma}\colon [0, L(c)] \to \mathbb{R}^2;\ s \mapsto (\widetilde{x}(s), \widetilde{y}(s))$ は γ の弧長パラメータによる再パラメータ付けである.

平面曲線 C の点 $\gamma(t)$ における曲率 $\kappa(t)$ を $\kappa(t) = \widetilde{\kappa}(s(t))$ によって定義する.

(1) $\mathbf{e}(t) = \widetilde{\mathbf{e}}(s(t))$, $\mathbf{n}(t) = \widetilde{\mathbf{n}}(s(t))$ を示せ.

(2) $\kappa(t) = \dfrac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{||\gamma'(t)||^3}$ を示せ.

$\boxed{3}$ (1) 楕円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a, b > 0)$, 放物線 $y = ax^2$ $(a > 0)$, 双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a, b > 0)$ をそれぞれ適当にパラメータ付けて, 曲率を計算せよ.
(双曲線のパラメータ表示には双曲線関数を用いよ.)

(2) 以下のパラメータ表示によって与えられる平面曲線の曲率を計算せよ.
$\gamma(t) = \left(t, a\cosh\dfrac{t}{a}\right)$ $(a > 0$, 懸垂線$)$
$\gamma(t) = (at\cos t, at\sin t)$ $(a > 0$, らせん$)$
$\gamma(t) = \left(ae^{bt}\cos t, ae^{bt}\sin t\right)$ $(a, b > 0$, 対数らせん$)$
$\gamma(t) = \left(\dfrac{a}{t}\cos t, \dfrac{a}{t}\sin t\right)$ $(a > 0$, 双曲らせん$)$
$\gamma(t) = \left(a\cos^3 t, a\sin^3 t\right)$ $(a > 0$, アステロイド$)$
$\gamma(t) = \left(a\sqrt{2\cos 2t}\cos t, a\sqrt{2\cos 2t}\sin t\right)$ $(a > 0$, レムニスケート$)$
$\gamma(t) = \left(\dfrac{3at}{1+t^3}, \dfrac{3at^2}{1+t^3}\right)$ $(a > 0$, デカルトの葉線$)$
$\gamma(t) = (a(1+\cos t)\cos t, a(1+\cos t)\sin t)$ $(a > 0$, カルジオイド$)$

$\boxed{4}$ 「曲率が一定である平面曲線は直線と円 (の一部) に限る」ことが知られている. 平面曲線 $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^2$ のパラメータは弧長パラメータ s であるとし, 一定の曲率 κ をもつとする. 以下の問を解くことにより, 上の事実を証明してみよう.

(1) $\kappa = 0$ のとき, C は線分であることを示せ.

(2) $\kappa \neq 0$ のとき, $\mathbf{p}(s) = \gamma(s) + \dfrac{1}{\kappa}\mathbf{n}(s)$ とおく. $\mathbf{p}'(s) \equiv \mathbf{0}$ を示し, このことから C が円弧であることを結論付けよ.

$\boxed{5}$ $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^2$ を平面曲線とし,

$$\varphi : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mapsto U\mathbf{x} + \mathbf{q} \in \mathbb{R}^2$$

(U は 2 次直交行列, $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^2$) を合同変換とする. このとき, $\widetilde{\gamma}(t) = (\varphi \circ \gamma)(t)$ とおくことにより, 新たに曲線 $\widetilde{\gamma}\colon [a, b] \to \mathbb{R}^2$ を得る. 次を示せ. (ただし, $\mathbf{e}(t)$, $\mathbf{n}(t)$ は $T_{\gamma(t)}\mathbb{R}^2$ の元で

はなく, $\mathbb{R}^2$ の元とみなしている. $\widetilde{\mathbf{e}}(t)$, $\widetilde{\mathbf{n}}(t)$ についても同様である.)

$$\widetilde{\mathbf{e}}(t) = U\mathbf{e}(t), \quad \widetilde{\mathbf{n}}(t) = \begin{cases} U\mathbf{n}(t) & (\det U = 1 \text{ の場合}) \\ -U\mathbf{n}(t) & (\det U = -1 \text{ の場合}) \end{cases}$$

$$\widetilde{\kappa}(t) = \begin{cases} \kappa(t) & (\det U = 1 \text{ の場合}) \\ -\kappa(t) & (\det U = -1 \text{ の場合}) \end{cases}$$

$\boxed{6}$ $\kappa(s)$ $(a \leq s \leq b)$ を関数とし, 関数 $x(s)$, $y(s)$ を

$$x(s) = \int_a^s \left(\cos \int_a^t \kappa(u)\,du\right) dt, \quad y(s) = \int_a^s \left(\sin \int_a^t \kappa(u)\,du\right) dt$$

によって定める. このとき

$$\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2;\ s \mapsto (x(s), y(s))$$

は, s を弧長パラメータとし $\kappa(s)$ を曲率とする曲線であることを確かめよ.

$\boxed{7}$ 二つの平面曲線 $\gamma_1\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma_2\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ のパラメータは弧長パラメータ s であるとし,

$$\kappa_1(s) = \kappa_2(s) \quad (a \leq {}^\forall s \leq b)$$

が成り立っているとする. このとき, $\mathbb{R}^2$ の合同変換 $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ で, $\varphi(\gamma_1(s)) = \gamma_2(s)$ $(a \leq {}^\forall s \leq b)$ をみたすものが存在する. 以下の問を解くことによって, このことを証明してみよう. まず, γ_1, γ_2 が

$$(*) \qquad \gamma_1(a) = \gamma_2(a), \quad {\gamma_1}'(a) = {\gamma_2}'(a)$$

をみたすと仮定して, $\gamma_1(s) = \gamma_2(s)$ $(a \leq {}^\forall s \leq b)$ を示すことにする.

(1) $\langle {\gamma_1}'(s), {\gamma_2}'(s) \rangle = 1$ $(a \leq {}^\forall s \leq b)$ を示せ. (ヒント　左辺の微分を計算せよ.)

(2) ${\gamma_1}'(s) = {\gamma_2}'(s)$ $(a \leq {}^\forall s \leq b)$ を示し, これから $\gamma_1(s) = \gamma_2(s)$ $(a \leq {}^\forall s \leq b)$ を結論付けよ. (ヒント　$|{\gamma_1}'(s) - {\gamma_2}'(s)|^2$ を計算せよ.)

次に, $(*)$ がみたされていない一般の場合を考える.

(3) $\mathbb{R}^2$ の合同変換

$$\varphi : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mapsto U\mathbf{x} + \mathbf{q} \in \mathbb{R}^2 \quad (U \text{ は回転行列, } \mathbf{q} \in \mathbb{R}^2)$$

で,

$$\varphi(\gamma_1(a)) = \gamma_2(a), \quad \varphi({\gamma_1}'(a)) = {\gamma_2}'(a)$$

をみたすものが存在することを確かめよ. また, このとき $\varphi(\gamma_1(s)) = \gamma_2(s)$ $(a \leq {}^\forall s \leq b)$ を示せ. (ヒント　$\boxed{5}$ を用いよ.)

$\boxed{8}$ 半径 a $(a>0)$ の円が, 与えられた直線上を滑ることなく転がるとき, この円上の定点が描く軌跡を**サイクロイド**という. 定点が原点 $(0,0)$ を出発して x 軸上を転がったときの円の回転角を t とすると, 曲線は

$$\gamma(t)=(a(t-\sin t),a(1-\cos t))$$

と表示される. 円が一回転すると t は 0 から 2π まで動くが, これをサイクロイドの 1 周期とよぶ. 以下の問に答えよ.

(1) サイクロイドの 1 周期の長さは, 円の半径の 8 倍になることを示せ.

以下, パラメータ t の動く範囲は区間 $[0,2\pi]$ とする.

(2) 区間 $[0,t]$ に対応する弧長 $s(t)$ とその逆関数 $t(s)$ を求めよ.

(3) $\gamma(t)$ の弧長パラメータによる再パラメータ付け $\widetilde{\gamma}(s)$ を求めよ. γ, $\widetilde{\gamma}$ を用いてそれぞれ曲率 $\kappa(t)$, $\widetilde{\kappa}(s)$ を計算し, $\widetilde{\kappa}(s(t))=\kappa(t)$ を確かめよ.

サイクロイドは最速降下線として知られている. 最速降下線の問題については
梅原雅顕・山田光太郎　「曲線と曲面–微分幾何的アプローチ–」(裳華房)
の §16, 付録 B-1 に解説があるが, 他にも色々な文献・ウェッブページで扱われている. サイクロイドに限らず, 種々の曲線について自ら調べてみるとよい (例えば, クロソイド曲線とその応用について).

$\boxed{9}$ 以下のパラメータ表示によって与えられる空間曲線の $\mathbf{e}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$, κ, τ を計算せよ.

$\gamma(s)=\left(\dfrac{4}{5}\cos s,1-\sin s,-\dfrac{3}{5}\cos s\right)$

(この曲線が円であることを示し, その中心と半径を求めよ.)

$\gamma(s)=\left(\dfrac{(1+s)^{3/2}}{3},\dfrac{(1-s)^{3/2}}{3},\dfrac{s}{\sqrt{2}}\right)$

$\gamma(t)=\left(at,bt^2,ct^3\right)\quad(a,b,c>0)$

$\gamma(t)=(a\cosh t,a\sinh t,bt)\ (a,b>0)$

$\gamma(t)=\left(ae^{bt}\cos t,ae^{bt}\sin t,ct\right)\ (a,b,c>0)$

$\gamma(t)=\left(\dfrac{a}{t}\cos t,\dfrac{a}{t}\sin t,bt\right)\ (a,b>0)$

$\gamma(t)=\left(a\cos^2 t,a\sin t\cos t,a\sin t\right)\ (a>0)$

$\boxed{10}$ (1)

$$\gamma\colon[a,b]\to\mathbb{R}^2;\ t\mapsto(x(t),y(t))$$

を平面曲線とする. (ただし, 曲率はいたるところ零でないとする.) このとき, 空間曲線

$$\overline{\gamma}\colon[a,b]\to\mathbb{R}^3;\ t\mapsto(x(t),y(t),0)$$

の捩率はいたるところ零であることを示せ.

(2) 空間曲線

$$\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3;\ t \mapsto (t, t^2 - t, 1 - t^2)$$

の捩率がいたるところ零であることを確かめよ. また, この曲線がある平面上にのっていることを確かめよ.

$\boxed{11}$ 空間曲線 $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3;\ s \mapsto (x(s), y(s), z(s))$ (s は弧長パラメータ) と $a > 0$ に対して, 新たな曲線

$$\overline{\gamma}\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3;\ s \mapsto (a\,x(s), a\,y(s), a\,z(s))$$

を考える. 以下の問に答えよ.

(1) 曲線 $\overline{\gamma}$ の弧長パラメータ $\overline{s}$ は, $\overline{s} = a\,s$ で与えられることを示せ.

(2) 曲線 $\overline{\gamma}$ の曲率 $\overline{\kappa}(\overline{s})$ と捩率 $\overline{\tau}(\overline{s})$ は, それぞれ $\overline{\kappa}(\overline{s}) = \dfrac{1}{a}\kappa(s)$, $\overline{\tau}(\overline{s}) = \dfrac{1}{a}\tau(s)$ $(s = \overline{s}/a)$ で与えられることを示せ.

$\boxed{12}$ $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$ を空間曲線とし,

$$\varphi : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mapsto U\mathbf{x} + \mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$$

(U は 3 次直交行列, $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$) を合同変換とする. このとき, $\widetilde{\gamma}(t) = (\varphi \circ \gamma)(t)$ とおくことにより, 新たに空間曲線 $\widetilde{\gamma}\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$ を定める. 以下を示せ. (ただし, $\mathbf{e}(t)$, $\mathbf{n}(t)$, $\mathbf{b}(t)$ は $T_{\gamma(t)}\mathbb{R}^3$ の元ではなく, $\mathbb{R}^3$ の元とみなしている. $\widetilde{\mathbf{e}}(t)$, $\widetilde{\mathbf{n}}(t)$, $\widetilde{\mathbf{n}}(t)$ についても同様である.)

$$\widetilde{\mathbf{e}}(t) = U\mathbf{e}(t), \quad \widetilde{\mathbf{n}}(t) = U\mathbf{n}(t), \quad \widetilde{\mathbf{b}}(t) = \begin{cases} U\mathbf{b}(t) & (\det U = 1 \text{ の場合}) \\ -U\mathbf{b}(t) & (\det U = -1 \text{ の場合}) \end{cases}$$

$$\widetilde{\kappa}(t) = \kappa(t), \quad \widetilde{\tau}(t) = \begin{cases} \tau(t) & (\det U = 1 \text{ の場合}) \\ -\tau(t) & (\det U = -1 \text{ の場合}) \end{cases}$$

$\boxed{13}$ 二つの空間曲線 $\gamma_1\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma_2\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$ のパラメータは弧長パラメータ s であるとし, 曲率, 捩率がそれぞれ $\kappa(s)$, $\tau(s)$ に等しいものとする. また,

$$\mathbf{e}_1(a) = \mathbf{e}_2(a), \quad \mathbf{n}_1(a) = \mathbf{n}_2(a), \quad \mathbf{b}_1(a) = \mathbf{b}_2(a)$$

を満たしているとする. このとき,

$$\mathbf{e}_1(s) = \mathbf{e}_2(s), \quad \mathbf{n}_1(s) = \mathbf{n}_2(s), \quad \mathbf{b}_1(s) = \mathbf{b}_2(s)$$

となることを, 以下の手順で示してみよう. まず,

$$F_i(s) = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_i(s) \\ \mathbf{n}_i(s) \\ \mathbf{b}_i(s) \end{pmatrix} \quad (i = 1, 2)$$

とおくとき, $({}^tF_2(s)F_1(s))' = 0$ $(a \leq {}^\forall s \leq b)$ を示せ. また, これから $F_1(s) = F_2(s)$ $(a \leq {}^\forall s \leq b)$ を導け.

$\boxed{14}$ (1) 二つの空間曲線 $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$, $\widetilde{\gamma}\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$ について,

$$||T(t)|| = ||T(t)||,\ \kappa(t) = \widetilde{\kappa}(t),\ \tau(t) = \pm\widetilde{\tau}(t) \quad ({}^\forall t \in [a,b])$$

が成り立っているとする. このとき, γ と $\widetilde{\gamma}$ は合同であることを示せ.

(2) パラメータ表示 $\gamma(t) = \left(t + \sqrt{3}\sin t, 2\cos t, \sqrt{3}t - \sin t\right)$ によって与えられる曲線が常らせんであることを, 曲率と捩率を求めることによって示せ. また, パラメータ表示が $\widetilde{\gamma}(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$ という形の常らせん, および $\varphi\circ\gamma = \widetilde{\gamma}$ となる合同変換 $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を求めよ.

(3) パラメータ表示 $\gamma(t) = \left(\sqrt{2}t, t^2, 0\right)$, $\widetilde{\gamma}(t) = (-t, t, t^2)$ によって与えられる二つの空間曲線が合同であることを示せ. また, $\varphi \circ \gamma = \widetilde{\gamma}$ となる合同変換 $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を求めよ.

$\boxed{15}$ $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$ を空間曲線とする. γ の捩率がいたるところ 0 になるための必要十分条件は, C がある一つの平面に含まれることである. この事実を示せ. (ヒント　パラメータは弧長パラメータとしてよい. 何故か?)

$\boxed{16}$ 空間曲線 $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$ のパラメータは弧長パラメータであるとする. いたるところ $\kappa > 0$, $\tau \neq 0$ であるとし, $\rho = 1/\kappa$, $\sigma = 1/\tau$ とおく. 以下の問に答えよ.

(1) C が中心 $\mathbf{a}$, 半径 r の球面に含まれるとき, $\gamma - \mathbf{a} = -\rho\mathbf{n} - \rho'\sigma\mathbf{b}$ を示し, $r^2 = \rho^2 + (\rho'\tau)^2$ となることを確かめよ.

(2) 逆に, $\rho^2 + (\rho'\sigma)^2$ が一定の値 r^2 をとり, いたるところ $\rho' \neq 0$ であるならば, C は半径 r の球面に含まれることを示せ.

$\boxed{17}$ $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$ を空間曲線とし, $\gamma''(t) \neq 0$ $({}^\forall t)$ と仮定する. このとき, 以下の式 (一般パラメータの場合のフルネ・セレの公式) を示せ.

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}'(t) &= && \kappa(t)\,||\gamma'(t)||\,\mathbf{n}(t) && \\
\mathbf{n}'(t) &= -\kappa(t)\,||\gamma'(t)||\,\mathbf{e}(t) && && \tau(t)\,||\gamma'(t)||\,\mathbf{b}(t) \\
\mathbf{b}'(t) &= && -\tau(t)\,||\gamma'(t)||\,\mathbf{n}(t) &&
\end{aligned}$$

$\boxed{18}$ (球面の局所パラメータ付け)

$\mathbb{R}^3$ 内の球面

$$S^2(r) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = r^2\} \quad (r > 0)$$

を考える．以下の問に答えよ．

(1) 平面 $z = r$ 上の点 $P(u, v, r)$ に対して, 直線 OP (O は原点) が $S^2(r)$ の「北半球」と交わる点を Q とする．Q の座標を u, v を用いて表せ.
(写像 $Q \mapsto P$ のことを**中心射影**という.)

(2) 球面 $S^2(r)$ の「北半球」の局所パラメータ付けを, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ に (1) で求めた点 Q を対応させることにより定める．この局所パラメータ付けを用いて, $S^2(r)$ の「北半球」の単位法ベクトル場, 第 1 基本量, 第 2 基本量, 平均曲率, ガウス曲率を計算せよ.

(3) $A(0, 0, -r)$ とする．xy 平面上の点 $P(u, v, 0)$ に対して, 直線 AP が $S^2(r)$ と交わる点を Q とする．Q の座標を u, v を用いて表せ.
(写像 $Q \mapsto P$ のことを**立体射影**という.)

(4) $S^2(r)$ の局所パラメータ付けを, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ に (3) で求めた点 Q を対応させることにより定める．この局所パラメータ付けを用いて, $S^2(r)$ の単位法ベクトル場, 第 1 基本量, 第 2 基本量, 平均曲率, ガウス曲率を計算せよ.

$\boxed{19}$ $a, b, c > 0$ とする．楕円面 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, 一葉双曲面 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, 二葉双曲面 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1$ をそれぞれ三角関数, 双曲線関数を用いて局所パラメータ付けし, 単位法ベクトル場, 第 1 基本量, 第 2 基本量, 平均曲率, ガウス曲率を計算せよ.

$\boxed{20}$ $R > r > 0$ とし, xz 平面内の点 $(R, 0)$ を中心とする半径 r の円を z 軸のまわりに回転して得られる曲面を S とする．S を図示し, 写像

$$f : D = (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3;\ (\theta, \varphi) \mapsto ((R + r\cos\theta)\cos\varphi, (R + r\cos\theta)\sin\varphi, r\sin\theta)$$

が S の局所パラメータ付けであることを示せ．また, f に用いて, 曲面 S の単位法ベクトル場, 第 1 基本量, 第 2 基本量, 平均曲率, ガウス曲率を計算せよ.

$\boxed{21}$ 写像 $f : D = (0, 2\pi) \times (-1/3, 1/3) \to \mathbb{R}^3$ を

$$f(u, v) = (\cos u, \sin u, 0) + v\left(\cos\frac{u}{2}\cos u, \cos\frac{u}{2}\sin u, \sin\frac{u}{2}\right)$$

によって定め, f の像を S とする．S は f によってパラメータ付けされた曲面であることを示し, 曲面 S を図示せよ．また, S の単位法ベクトル場 $\mathbf{N}$ を求めよ．$v = 0$ によって定まる S 上の曲線にそって一周すると $\mathbf{N}$ はどうなるか？

$\boxed{22}$　曲面 $S \subset \mathbb{R}^3$ は写像 $f\colon D \to \mathbb{R}^3$ によってパラメータ付けられているとし, ガウス曲率, 平均曲率をそれぞれ K, H とする. f を正の定数 c 倍したものを $\overline{f}$ とし, その像として得られる曲面を $\overline{S}$ とする. このとき, $\overline{S}$ のガウス曲率, 平均曲率はそれぞれ K/c^2, H/c となることを示せ.

$\boxed{23}$　曲面のガウス曲率と平均曲率がともに恒等的に 0 ならば, その任意の局所パラメータ付けに関する第 2 基本量 $L = h_{11}, M = h_{12}, N = h_{22}$ も恒等的に 0 になることを証明せよ. さらに, このような曲面は平面の一部になることを示せ.

$\boxed{24}$　(1)　関数 $z = \varphi(x, y)$ のグラフの第 1 基本量, 第 2 基本量をパラメータ付け $f(x, y) = (x, y, \varphi(x, y))$ を用いて計算せよ. また, 平均曲率, ガウス曲率を計算し, それぞれ

$$H = \frac{\varphi_{xx}(1 + {\varphi_y}^2) - 2\varphi_x\varphi_y\varphi_{xy} + \varphi_{yy}(1 + {\varphi_x}^2)}{2(1 + {\varphi_x}^2 + {\varphi_y}^2)^{3/2}}$$

$$K = \frac{\varphi_{xx}\varphi_{yy} - {\varphi_{xy}}^2}{(1 + {\varphi_x}^2 + {\varphi_y}^2)^2}$$

で与えられることを確かめよ.

(2)　$a, b > 0$ とする. 楕円放物面 $z = ax^2 + by^2$, 双曲放物面 $z = ax^2 - by^2$ の点 $(0, 0, 0)$ におけるガウス曲率を求めよ.

(3)　関数

$$z = \log \frac{\cos x}{\cos y} \quad (-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2})$$

のグラフの平均曲率を計算し, 恒等的に零であることを確かめよ.

この極小曲面は**シャーク (Scherk) の曲面**とよばれる.

$\boxed{25}$　(1)　関数 $z = \varphi(x)$ $(\varphi(x) > 0)$ のグラフを x 軸のまわりに回転して得られる回転面の単位法ベクトル場, 第 1 基本量, 第 2 基本量を, 局所パラメータ付け $f(x, \theta) = (x, \varphi(x)\cos\theta, \varphi(x)\sin\theta)$ を用いて計算せよ. また, ガウス曲率, 平均曲率を計算し, それぞれ

$$K = \frac{-\varphi''(x)}{\varphi(x)(1 + \varphi'(x)^2)^2}$$

$$H = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\varphi(x)(1 + \varphi'(x)^2)^{1/2}} - \frac{\varphi''(x)}{(1 + \varphi'(x)^2)^{3/2}}\right\}$$

で与えられることを確かめよ.

(2)　$z = a\cosh\dfrac{x}{a}$ (a は正の定数) のグラフを x 軸のまわりに回転して得られる回転面の平均曲率を計算し, 恒等的に零になることを確かめよ.

この極小曲面は**懸垂面** (**カテノイド**) とよばれる.

$\boxed{26}$ (1) a を定数とする. パラメータ付け

$$f(u_1, u_2) = (u_1 \cos u_2, u_1 \sin u_2, au_2) \quad (-\infty < u_1, u_2 < \infty)$$

によって与えられる曲面の単位法ベクトル場, 第 1 基本量, 第 2 基本量, ガウス曲率を計算せよ. また, 平均曲率が恒等的に零になることを確かめよ.

この極小曲面は**螺旋面** (**ヘリコイド**) とよばれる.

(2) パラメータ付け

$$f(u, v) = (3u + 3uv^2 - u^3, v^3 - 3v - 3u^2 v, 3(u^2 - v^2))$$

によって与えられる曲面の単位法ベクトル場, 第 1 基本量, 第 2 基本量, ガウス曲率を計算せよ. また, 平均曲率が恒等的に零になることを確かめよ.

この極小曲面は**エヌパー (Enneper) の曲面**とよばれる.

$\boxed{27}$ (1) 関数 $z = \varphi(x)$ $(x > 0)$ のグラフを z 軸のまわりに回転して得られる回転面の単位法ベクトル場, 第 1 基本形式, 第 2 基本形式, ガウス曲率, 平均曲率を, 局所パラメータ付け $f(x, \theta) = (x \cos \theta, x \sin \theta, \varphi(x))$ を用いて計算せよ.

(2) (1) の回転面のガウス曲率がいたるところ零になるような $\varphi(x)$ を決定せよ.

(3) a を正の定数とするとき, 関数

$$z = a \log \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} - \sqrt{a^2 - x^2}$$

のグラフを**トラクトリックス**とよぶ. この曲線を z 軸のまわりに回転して得られる回転面のガウス曲率がいたるところ $-\dfrac{1}{a^2}$ に等しいことを確かめよ.

$\boxed{28}$ 円柱面

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

と錐面

$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \sqrt{x^2 + y^2}\} \setminus \{(0, 0, 0)\}$$

を考える. S_2 は, 関数 $\varphi(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ $((x, y) \neq (0, 0))$ のグラフである. 以下の問に答えよ.

(1) S_1 の単位法ベクトル, 第 1 基本行列, 第 2 基本行列, ガウス曲率, 平均曲率を, 局所パラメータ付け

$$f_1(r, \theta) = (\cos \theta, \sin \theta, r)$$

を用いて計算せよ.

(2) S_2 の単位法ベクトル, 第 1 基本行列, 第 2 基本行列, ガウス曲率, 平均曲率を, 局所パラメータ付け

$$f_2(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, r) \quad (r > 0)$$

を用いて計算せよ.

(3) S_2 の単位法ベクトル, 第 1 基本行列, 第 2 基本行列, ガウス曲率, 平均曲率を, 演習問題 $\boxed{24}$ (1) の局所パラメータ付けを用いて計算せよ.

$\boxed{29}$ (1) 曲面 S の局所パラメータ付け $f\colon D \to U$ で
(∗) $\quad g_{11} = g_{22} = 1,\ g_{12} = 0$
をみたすものが存在するならば, S のガウス曲率 K は U において恒等的に零であることを示せ.

(2) 曲面 S の局所パラメータ付け $f\colon D \to U$(ただし $D \subset \{u_1 > 0\}$ とする) で
$g_{11} = 1, g_{22} = {u_1}^2,\ g_{12} = 0$
をみたすものが存在するならば, S のガウス曲率 K は U において恒等的に零であることを示せ.

(3) 画用紙を曲げて得られる曲面のガウス曲率は恒等的に零である. 理由を説明せよ.

(4) (1)–(3) の事実を用いて, 演習問題 $\boxed{28}$ のガウス曲率に関する計算結果を少なくとも二通りの仕方で説明せよ.

曲面 S の局所パラメータ付け $f\colon D \to U$ が (∗) をみたすならば, D 内の任意の曲線 γ_0 に対して, γ_0 の長さと $\gamma = f \circ \gamma_0$ の長さが等しい (何故か?). すなわち, (∗) をみたす U の局所パラメータ付けは, U の正確な地図を与えることになる. (U 上の「地理的模様」を f^{-1} によって D 上にコピーすると地図になる.)

(5) 球面の任意の開集合 U に対して, U の正確な地図は存在しないことを説明せよ.

$\boxed{30}$ (1) 球面の第 1 基本行列を, 局所パラメータ付け

$$f(u_1, u_2) = (\cos u_1 \cos u_2, \sin u_1 \cos u_2, \sin u_2) \quad (-\pi < u_1 < \pi, -\pi/2 < u_2 < \pi/2)$$

に関して計算せよ. f を S^2 の地図とみなしたとき, どのような曲線の長さを正確に表しているか? また, どのような曲線どうしのなす角を正確に表しているか?

(2) 球面の第 1 基本行列を, 局所パラメータ付け

$$f(u_1, u_2) = (\cos u_1 \sqrt{1 - {u_2}^2}, \sin u_1 \sqrt{1 - {u_2}^2}, v) \quad (-\pi < u_1 < \pi, -1 < u_2 < 1)$$

に関して計算し, その行列式が恒等的に 1 に等しいことを確かめよ.

(3) 球面の第 1 基本行列を, 局所パラメータ付け

$$f(u_1, u_2) = \left(\frac{\cos u_1}{\cosh u_2}, \frac{\sin u_1}{\cosh u_2}, \frac{\sinh u_2}{\cosh u_2} \right) \quad (-\pi < u_1 < \pi, -\infty < u_2 < \infty)$$

に関して計算せよ.

(2) の地図は, 球面上の面積を正確に表している (何故か?). そのような地図を**正積地図**という. 一方, (3) の地図は**メルカトルの地図**とよばれ, 球面上の角度を正確に表す (確かめよ). 大航海時代以来, 海図として広く用いられている. ウェッブページ
http://homepage1.nifty.com/ptolemy/projection/catalog.htm
で種々の地図をみることができる.

以下, **座標変換**といえば, $\xi_1\xi_2$ 平面内の連結開集合 $\widetilde{D}$ から u_1u_2 平面内の連結開集合 D への C^∞ 級の全単射 $\varphi:\widetilde{D}\to D$ で, 逆写像 φ^{-1} も C^∞ 級であるもののことをいう. ここで, φ が C^∞ 級であるとは, $\varphi(\xi_1,\xi_2)=(u_1(\xi_1,\xi_2),u_2(\xi_1,\xi_2))$ と関数の組として表したとき, $u_1(\xi_1,\xi_2)$, $u_2(\xi_1,\xi_2)$ が ξ_1,ξ_2 の C^∞ 級関数ということである. φ^{-1} が C^∞ 級というのも, 同様の意味である.

$\boxed{31}$ S を $\mathbb{R}^3$ 内の曲面とし, 写像 $f:D\to U$ を S 局所パラメータ付けとする. $\varphi\colon\widetilde{D}\to D$ を座標変換とし, S の新しい局所パラメータ付け $\widetilde{f}:\widetilde{D}\to U$ を $\widetilde{f}=f\circ\varphi$ によって定める.

D の座標を (u_1,u_2), $\widetilde{D}$ の座標を (ξ_1,ξ_2) で表すと, $\varphi(\xi_1,\xi_2)=(u_1(\xi_1,\xi_2),u_2(\xi_1,\xi_2))$, $\widetilde{f}(\xi_1,\xi_2)=f(u_1(\xi_1,\xi_2),u_2(\xi_1,\xi_2))$ である.

以下の問に答えよ. (この問題においては, 第 1 基本行列, 第 2 基本行列をそれぞれ^を省略して I, II で表す.)

(1) 局所パラメータ付け f, $\widetilde{f}$ に関する第 1 基本行列 I, $\widetilde{I}$ の間に

$$\widetilde{I}={}^t\Phi I\Phi,\quad \Phi=\begin{pmatrix}(u_1)_{\xi_1}&(u_1)_{\xi_2}\\(u_2)_{\xi_1}&(u_2)_{\xi_2}\end{pmatrix}$$

という関係があることを確かめよ.

(2) 局所パラメータ付け f, $\widetilde{f}$ に関する単位法ベクトル $\mathbf{N}$, $\widetilde{\mathbf{N}}$ の間に

$$\widetilde{\mathbf{N}}=\frac{\det\Phi}{|\det\Phi|}\mathbf{N}$$

という関係があることを確かめよ. 次に, 第 2 基本行列 II, $\widetilde{II}$ の間に

$$\widetilde{II}=\frac{\det\Phi}{|\det\Phi|}{}^t\Phi II\Phi,\quad \Phi=\begin{pmatrix}(u_1)_{\xi_1}&(u_1)_{\xi_2}\\(u_2)_{\xi_1}&(u_2)_{\xi_2}\end{pmatrix}$$

という関係があることを確かめよ.

(3) 局所パラメータ付け f, $\widetilde{f}$ に関するガウス曲率 K, $\widetilde{K}$, 平均曲率 H, $\widetilde{H}$ の間に

$$\widetilde{K}=K,\quad \widetilde{H}=\frac{\det\Phi}{|\det\Phi|}H$$

という関係があることを確かめよ.

(4) 曲面 S の面積が上のような局所パラメータ付けの取り換えで不変であること, すなわち $\displaystyle\int_D\sqrt{\det I}\,du_1du_2=\int_{\widetilde{D}}\sqrt{\det\widetilde{I}}\,d\xi_1d\xi_2$ が成り立つことを示せ.

$\boxed{32}$ (1) S を $\mathbb{R}^3$ 内の曲面とし, $f\colon D \to S$ を S のパラメータ付けとする. このとき, 曲面 S の面積は重積分 $A(S) = \int_D dA = \int_D \sqrt{\det \widehat{I}(u_1, u_2)}\, du_1 du_2$ によって与えられる.

φ を D 上の C^∞ 級関数で台がコンパクトなものとし, $t \in \mathbb{R}$ に対して写像 $f_t : D \to \mathbb{R}^3$ を

$$f_t(u_1, u_2) = f(u_1, u_2) + t\varphi(u_1, u_2)\mathbf{N}(u_1, u_2)$$

によって定めると, t が十分 0 に近ければ $S_t = f_t(D)$ は滑らかな曲面になる.

$$(**) \qquad \frac{d}{dt} A(S_t)\Big|_{t=0} = -2\int_D \varphi H\, dA$$

を示せ.

(2) 針金の枠を石鹸膜で張ると, これは枠を張るすべての膜の中で最小 (正確には極小) の面積をもつ. 式 $(**)$ を用いて, 石鹸膜の平均曲率が至るところ零になることを示せ.