

# 構造解析学

# 目次

第 I 部 基礎理論	9
第 1 章 マトリクス概論	11
1.1 基本概念	11
1.1.1 一次変換 (linear transformation)、マトリクス (matrix) とベクトル (vector)	11
1.1.2 行ベクトル (column vector) と列ベクトル (row vector)	12
1.1.3 簡単な演算則	12
1.1.4 種々のマトリクス	13
1.1.5 一次従属 (linearly dependent)、階数 (rank)、特異 (singularity)、行列式 (Determinant)	14
1.2 マトリクスの積 (product)	15
1.2.1 乗法と諸定理	15
1.2.2 ディヤード積 (Dyad Product)	16
1.2.3 直交マトリクス (Orthogonal Matrix)	17
1.2.4 逆マトリクス (Inversed Matrix)	18
1.3 座標変換 (Coordinate Transformation)、相似変換 (Similar Transformation)、合同変換 (Congruent Transformation)、直交変換 (Orthogonal Transformation)	18
1.3.1 座標変換・相似変換	18
1.3.2 合同変換	19
1.4 一次方程式 (Linear Equation)	19
1.4.1 ガウスの消去法 (Gauss' Elimination Method)	19
1.4.2 コレスキー法 (Choleski Method)	20
1.5 固有値問題 (Eigenvalue Problem)	20
1.5.1 固有値 (Eigenvalue) と固有ベクトル (Eigenvector)	20
1.5.2 二次の固有値問題 (Eigenvalue Problem of Second Order)	21
1.6 マトリクスの微分 (Differentiation) と積分 (Integration)	21
1.6.1 マトリクスの微分と積分の定義	21
1.6.2 マトリクスの微分に関する公式	21
1.7 マトリクスの数値計算法 (Numerical Method)	22
1.7.1 一次方程式	22

1.7.2	固有値問題	22
<b>第2章</b>	<b>変分法</b>	<b>23</b>
2.1	変分問題とは	23
2.1.1	光路の問題	23
2.1.2	測地線の問題	27
2.2	変分法と変分原理	29
2.2.1	変分法	29
2.2.2	変分原理	30
2.2.3	オイラーの方程式	31
2.2.4	オイラーの方程式の第一積分	33
2.2.5	Lagrange 乗数法	34
2.2.6	付帯条件	36
2.3	直接法による変分問題の解法	38
2.3.1	直接法	38
2.3.2	汎関数の近似	38
2.3.3	例題	38
2.3.4	Ritz 法	39
2.3.5	Galerkin 法	41
2.3.6	厳密解と近似解の誤差について	43
<b>第3章</b>	<b>曲線と曲面</b>	<b>45</b>
3.1	ベクトルの演算	45
3.1.1	単位ベクトルの演算	45
3.1.2	スカラー積とベクトル積	46
3.1.3	位置ベクトルと方向余弦	47
3.2	空間曲線の表示	49
3.2.1	曲線のパラメーター表示	49
3.2.2	平面曲線のパラメーター表示	50
3.2.3	空間曲線のパラメーター表示	50
3.2.4	曲線の長さ	50
3.2.5	接線ベクトル	51
3.2.6	曲線の曲率と法線ベクトル	53
3.2.7	一般の曲線 $y = f(x)$ の曲率	55
3.3	Frenet の公式	56
3.4	曲面	58
3.4.1	曲面のパラメーター表示	58
3.4.2	第一基本形式	60
3.4.3	曲面の法線	62

構造解析学	5
-------	---

3.4.4	曲面の面積	63
3.4.5	法線曲率と第2基本形式	64
3.4.6	Munier (ミューニエ) の定理	67
3.4.7	主曲率と曲率線座標	67
3.4.8	接線ベクトルと法線ベクトルの微分	71
3.4.9	Gauss-Codazzi の条件	73
3.5	曲面の分類	73
3.6	回転曲面	74
3.6.1	球形シェル	75
3.6.2	円筒シェル	76
3.6.3	一般の回転シェル	77

<b>第 II 部 応用理論</b>	<b>81</b>
--------------------	-----------

<b>第 4 章 シェルの基礎方程式</b>	<b>83</b>
------------------------	-----------

4.1	シェル	83
4.2	シェル理論の基本仮定	84
4.3	歪 - 変位関係式	86
4.3.1	座標	86
4.3.2	歪 - 変位関係式	88
4.3.3	Kirchhoff-Love の仮定の導入	89
4.4	構成方程式 (応力 - 歪関係式)	94
4.4.1	Hooke の法則	95
4.4.2	合応力・合モーメントと歪との関係式	95
4.4.3	合応力・合モーメントから応力を求める方法	96
4.5	釣合方程式	97
4.5.1	ベクトル方程式を用いて釣合方程式を導く方法	97
4.5.2	Hamilton の原理を用いて釣合方程式を導く方法	100
4.6	種々の座標系での基礎方程式	105
4.6.1	円板 - 極座標系	105
4.6.2	回転シェル	107
4.6.3	球形シェル - 球座標	109
4.6.4	円筒シェル - 円筒座標	111
4.6.5	円錐シェル	113

<b>第 5 章 シェルの膜理論</b>	<b>115</b>
----------------------	------------

5.1	膜応力状態の具体例による把握	115
5.2	膜理論の基礎方程式	121
5.2.1	曲率線座標における基礎方程式	121

5.2.2	回転シェルに対する膜理論の基礎式	122
5.2.3	軸対称荷重を受ける回転シェルの膜理論解	123
<b>第 6 章</b>	<b>場の方程式とエネルギー原理</b>	<b>127</b>
6.1	応力の釣合方程式 (平面応力)	127
6.2	2次元弾性力学の基礎方程式 (平面応力)	127
6.3	3次元弾性力学の基礎方程式	129
6.4	弾性境界値問題と仮想仕事の原理	131
6.4.1	微小変形弾性境界値問題	131
6.4.2	仮想仕事の原理 (Principle of Virtual Work) の誘導	132
6.4.3	弾性境界値問題の解の唯一性	134
6.5	全ポテンシャルエネルギー最小の原理	135
<b>第 7 章</b>	<b>有限要素法</b>	<b>137</b>
7.1	有限要素法とは	137
7.2	離散化 (discretization)	138
7.2.1	関数の近似法	138
7.2.2	三角形一次要素	139
7.2.3	要素内の歪	142
7.2.4	要素内応力	142
7.2.5	要素	143
7.3	全ポテンシャルエネルギー最小の原理	143
7.3.1	全ポテンシャルエネルギー	143
7.3.2	要素の歪みエネルギー密度関数	144
7.3.3	要素の物体力 $\{b\}$ と表面力 $\{t\}$	144
7.3.4	全体の全ポテンシャルエネルギー	145
7.3.5	剛性方程式	145
7.3.6	応力	147
7.4	FEM とコンピューター	147
<b>第 8 章</b>	<b>構造の解析から創生へ</b>	<b>149</b>
8.1	構造形態解析と構造形態創生	149
8.2	構造形態創生法	150
8.2.1	遺伝的アルゴリズムと免疫アルゴリズム	151
8.2.2	セル・オートマトンと ESO 法	151
8.3	構造形態創生法による構造デザイン	151
8.3.1	オフィスビル壁体の設計	154
8.3.2	シェル屋根の設計	154
8.3.3	三次元連続体の設計	154
8.4	理論的デザイン法への誘い	154

付録 A 歪み-変位関係式の誘導	161
A.1 準備	161
A.2 $\varepsilon_i$ の誘導	163
A.3 $\gamma_{ij}$ の誘導	163

## 第8章 構造の解析から創生へ

### 8.1 構造形態解析と構造形態創生

建築構造の分野で「構造形態解析」という言葉が使われたのは1990年代初頭の半谷によるものが最初である[12]。彼は、「構造形態」という言葉を、構造物の形状や境界条件のような幾何学的な要素である「形(かたち)」と、構造物の内部に生じている応力や歪みあるいは温度などの物理状態を構成する要素である「態(ありさま)」の融合した言葉と捉え、それら相互の関係を力学的な方法によりつまびらかにすることを「構造形態解析」と呼んだ。

ところで、「解析」という言葉は、英語の analysis に相当し、chemical analysis が化学分析を意味しているように「分析」と同義で、対象物を細分化、小要素化して、その構成や組成ないしはそれらの相互関係を明らかにすることを意味する。構造工学で言う「構造解析」は、構造物が荷重を受けた際に生じる力学的な応答を求めることを言い、構造物の力学的な挙動を分析的に明らかにすることを意味している。図8.1は構造物の諸元と性能の関係を示している。構造諸元は構造物の材料、形状、支持条件、荷重条件、構造形式などからなる一方、構造性能としては変形、応力、耐力、安定性といった構造力学的な要素とそれ以外に構造の持つ経済性や美しさなどもこれに含まれる。上述の構造解析は構造物の力学的応答諸量を求めるものであり、図に示されているように所与の構造諸元が帰する構造の性能を求めることに対応する。経済性や美しさは力学的な解析の帰結とは言えないが、ここでは広く解釈して構造諸元の「解析」により帰するものと捉えている。また、既述の半谷による構造形態解析は構造諸元と構造性能の関係性を論じるもので、図に示すように構造諸元と構造性能を大きく包み込むものとして表すことができる。

さて、一般に構造設計という行為は目的とする構造性能を発現する構造物の構造諸元を明らかにすることと考えることができる。すなわち、要求される構造性能を発揮するような構造物が持つべき構造諸元を具現すること。これが構造設計の役割であると言える。言うまでもなく、構造設計には力学的な要素だけではなく、機能性、経済性、社会性、審美性など、多くの要素が相互に絡み合い、それ自体非常に複雑で広範なものである。そこで、構造解析と論理的に逆の方向性を持ち、主として構造力学的な要素のみからなる行為、すなわち所与の力学的な構造性能を具現する構造形態を求めることを構造設計とは別に「構造形態創生」あるいは単に「形態創生」と呼ぶ。これは、大変広範な要因の絡む構造設計の部分集合として位置づけられる。結局、既知の構造諸元からその構造性能を導き出す過程を構造解析、それとは逆に、所与の構造性能を実現する構造諸元を求める過程を構造形態創生、構造諸元と構造性能の主として力学的な関係性を明らかにすることを構造形態解

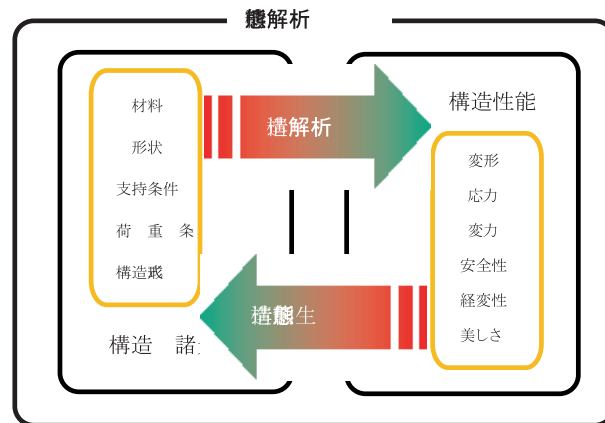


Fig. 8.1: 構造解析と構造形態創生

析と呼ぶことができるのである。

ここでは、上述の構造形態創生の具体的な方法とその適用により構造設計の現場で今、何がどこまで実現されつつあるのかについて概略的に述べる。

## 8.2 構造形態創生法

構造形態創生には構造最適化法を用いる。構造最適化の詳しい説明は他の文献 [8] に譲るが、重要なことは構造最適化には寸法（形状）の最適化と位相（トポロジー）の最適化の大きく二種類があるということである。前者は梁や柱の断面積や形状、骨組の形状やシェルや空間構造の曲面形状を求めるもので、連続変数のみを扱う多くの非線形計画法により解くことができるものである。一方、後者は骨組の組み方や連続体の穴の空き具合を決めるものであり、原理的に組み合わせ整数計画問題に帰着される。歴史的には寸法（形状）最適化の研究が 19 世紀末には既に始まっているのに対して、任意形状の構造の位相最適化の研究は長い間未着手で 1980 年代後半になって初めて成功を収めている [3]。その理由は端的には、位相最適化には結果的に高速演算が可能な計算機の出現が必須であったことによるものであるとすることができる。

構造形態創生には位相を扱うことのできる構造最適化法の援護が不可欠である。ここでは、そのための方法として、生物が持つ優れた情報伝達の機能を模倣した生物的アプローチである遺伝的アルゴリズムと免疫アルゴリズム、及びセル・オートマトンと ESO 法について述べる。これらはいずれも非常に単純な規則の繰り返し計算に基づく方法であり、それ故に非常にタフで拡張性の極めて高い手法である。



### 8.2.1 遺伝的アルゴリズムと免疫アルゴリズム

ダーウィンの進化論に基づく生物の進化過程における適合種の発生のメカニズムを応用し、組み合わせ最適化問題を解くための探索法としたのが遺伝的アルゴリズム (GA, Genetic Algorithm) である。この手法は初期の発展段階においては、遺伝的計画法 (Genetic Plans) と呼ばれ、工業生産計画やネットワークの最適化問題に適用することを意図して、Holland により考案された [2]。

その後、Michigan 大学で彼の学生であった Goldberg により、プラント施設におけるガスパイプラインの最適配置問題への応用が成功 [1] して以来、様々な問題への応用が始められ、現在も世界中で精力的な研究が続けられている。立体トラス、フレームの構造最適化に GA を応用した例を図 8.2 に示す [9, 5, 5, 7, 6]。一方、免疫アルゴリズム (IA, Immune Algorithm) は生物の免疫機構を最適化問題の解法に用いた計算法であり、生体が生命を維持するために持つ、伝染病から自己を守るシステムである免疫機構を応用した方法で、種 (解) の多様性を確保する上で極めて有用な手法である [13]。これらは骨組構造の構造形態創生を可能にする手法である。

### 8.2.2 セル・オートマトンと ESO 法

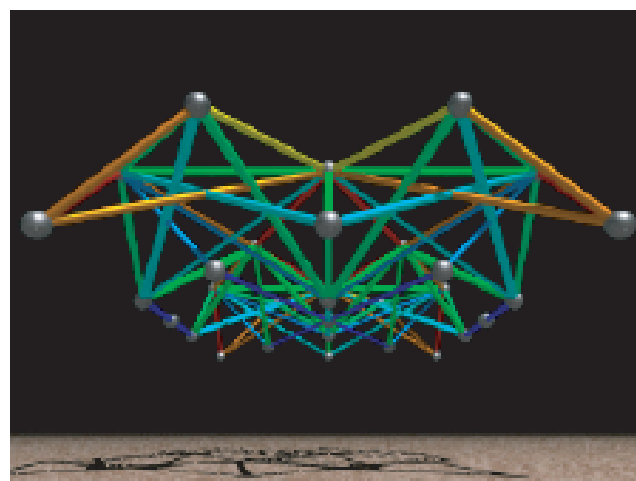
セル・オートマトン (CA, Cellular Automata) は 1940 年代に計算機の父とされる von Neumann により提唱された。これは、セルと呼ばれる小領域が規則正しく格子状に相互接続した系を考え、一つのセルの状態をそのセルと周辺のセルとの間にある規則に従う単純な繰り返し計算に基づいて決めるものであり、結果として自己組織的に全体を形成する方法である。構造解析の一手法である有限要素法とこの CA とを組合せて得られる構造形態創生法として、自律分散有限要素法 [14] (ADFEM, Autonomous Decentralized Finite Element Method) と進化的構造最適化手法 [4] (ESO, Evolutionary Structural Optimization) がある。ADFEM は固定モーメント法と類似の考え方に基づいて計算する手法である一方、ESO 法は計算の過程で応力負荷の度合いに応じて構造の部分の必要・不必要を判別し、それぞれ削除・付加を行う過程を繰り返すことで構造形態を創生する方法である。図 8.3 に拡張 ESO 法 [10, 11] による簡単な例を示す。これらは連続体の構造形態創生を可能にする手法である。

## 8.3 構造形態創生法による構造デザイン

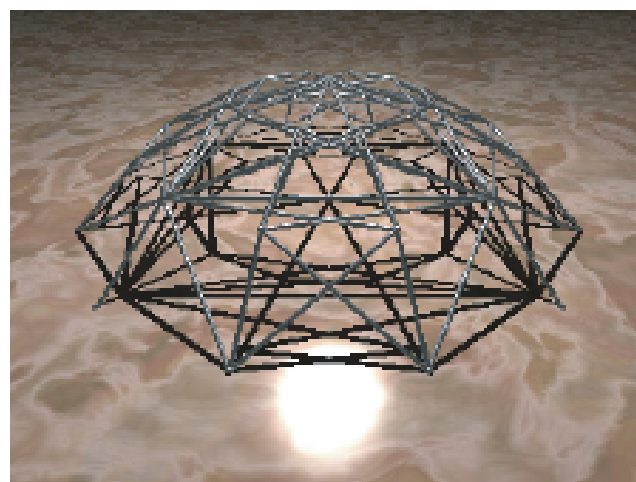
既述のように、構造形態創生は構造設計の一部として位置づけられる。これによれば、構造物の力学的な応答量である、応力、変位、固有振動数、線形座屈荷重などが所要の条件をクリアする一群の解候補として複数の構造形態群を求めることができ、これらを構造設計の特に初期段階でのデザインスタディーに用いれば、非常に効果的なものになる。このような試みは最近になって実際の設計において既に用いられ始めている。ここでは、構



ダブルレアー・トラスドーム



陸屋根立体トラス



シングルレアー・フレームドーム

Fig. 8.2: GA による骨組の構造形態創生

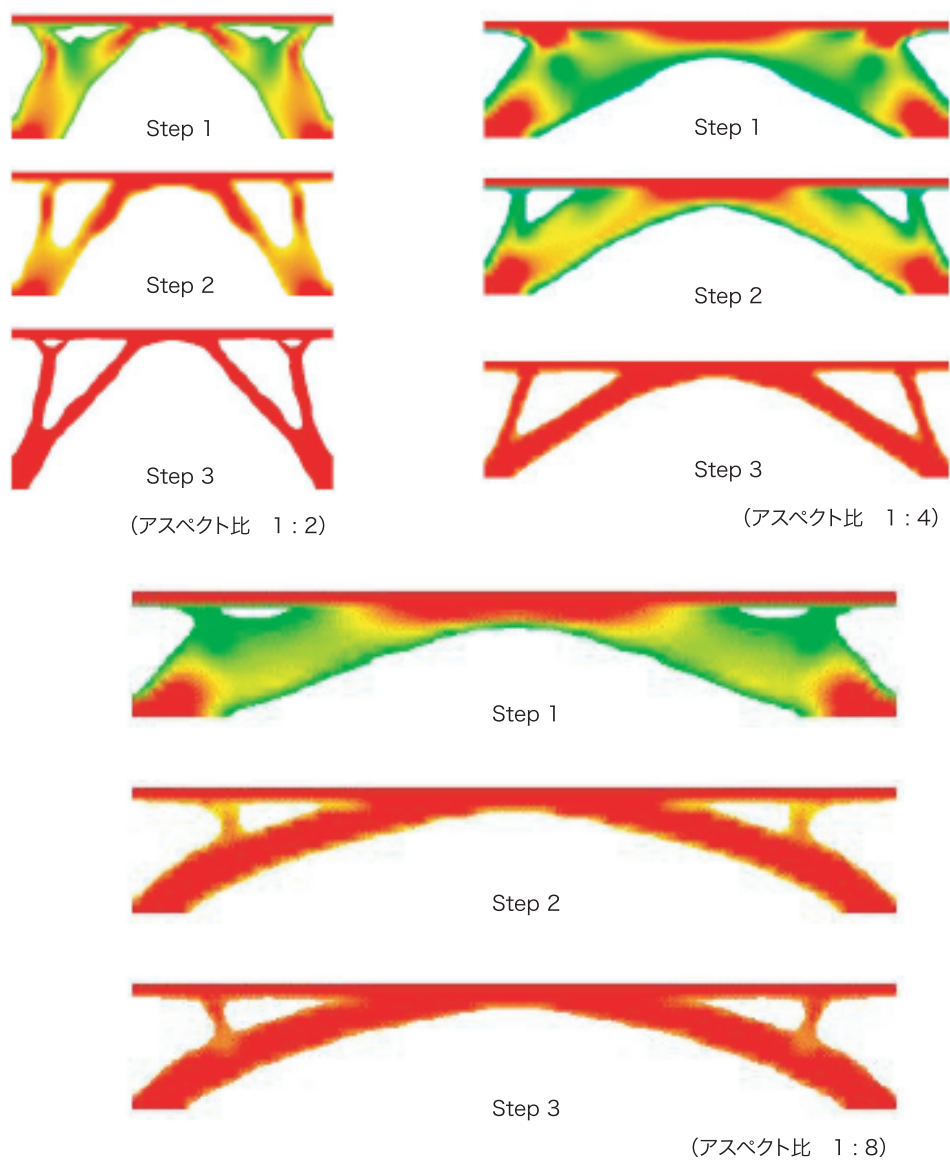


Fig. 8.3: 拡張 ESO 法による橋梁の構造形態創生

造形態創生法が構造デザインのための優れたスタディ・ツールとなるものであることを実例を通して示す。

### 8.3.1 オフィスビル壁体の設計

大阪府高槻市の繁華街南西角地に立地するオフィスビルの設計（芥川プロジェクト、設計：フータイアーキテクツ＋飯島建築事務所、協力：名城大学・武藤研究室）に構造形態創生法を用いた。道路に面する南面と西面の壁の形態創生に von Mises の相当応力による拡張 ESO 法 [10] を用いている。建築計画により要請される開口部条件を与条件とした上で、各階での鉛直荷重と水平二方向地震荷重を各床レベルで集中的に作用させて形態を発生させている。図 8.4 に南面の壁体を拡張 ESO 法により形態創生する際の進化過程と最終的に得られた構造のパスを示す。生成した壁の形状は、建物上部では曲げ抵抗型、下部では軸力抵抗型のトラス的な構造形態となっていることが分かる。

### 8.3.2 シェル屋根の設計

岐阜北方町生涯学習センター（設計：磯崎新アトリエ＋佐々木睦朗構造計画研究所）のシェル・ルーフの曲面形状のデザインに、全歪みエネルギーを目的関数とし、形状変化による微係数を感度とする構造形態創生法が用いられている。支持点の位置と中程の開口部の位置や寸法を形状要件として所与のものとした上で、自重下で曲げ歪みエネルギーが極小となる形状を探索することにより軸力による抵抗形式を主体とするシェル曲面の形状を求め、力学的に合理的な形状を実現している（図 8.5）。

### 8.3.3 三次元連続体の設計

長さ 400m、幅 42m の巨大な歩行屋根を持つ複合施設（フィレンツェ新駅コンペ案、設計：磯崎新アトリエ＋佐々木睦朗構造計画研究所）の構造デザインに構造形態創生法が用いられている。屋根面の構造をできるだけ薄くしつつ、支持構造の重量を最小とする有機的な三次元構造を実現するために、均等な分布荷重を受ける上部屋根面とその位置が建築計画的に与えられた支持基部とで囲まれた空間内に von Mises の相当応力を敏感数とした三次元の拡張 ESO 法 [10] を用いて形態を創生している。図 8.6 には初期形状から次第に進化して最終的な形状に至る途中の過程で得られる形状と最終形状によるコンペ案のパスを示す。

## 8.4 理論的デザイン法への誘い

与えられた構造物の力学的応答を求める「構造解析」から、要求される性能を持つ構造物の諸元を求める「構造形態創生」へ。そこで利用される技術は、構造最適化の研究によ



Fig. 8.4: 芥川プロジェクト・ハウス（設計：フータイアーキテクト + 飯島建築事務所）



Fig. 8.5: 岐阜北方町生涯学習センター・パース (設計: 磯崎新アトリエ + 佐々木睦朗構造計画研究所)

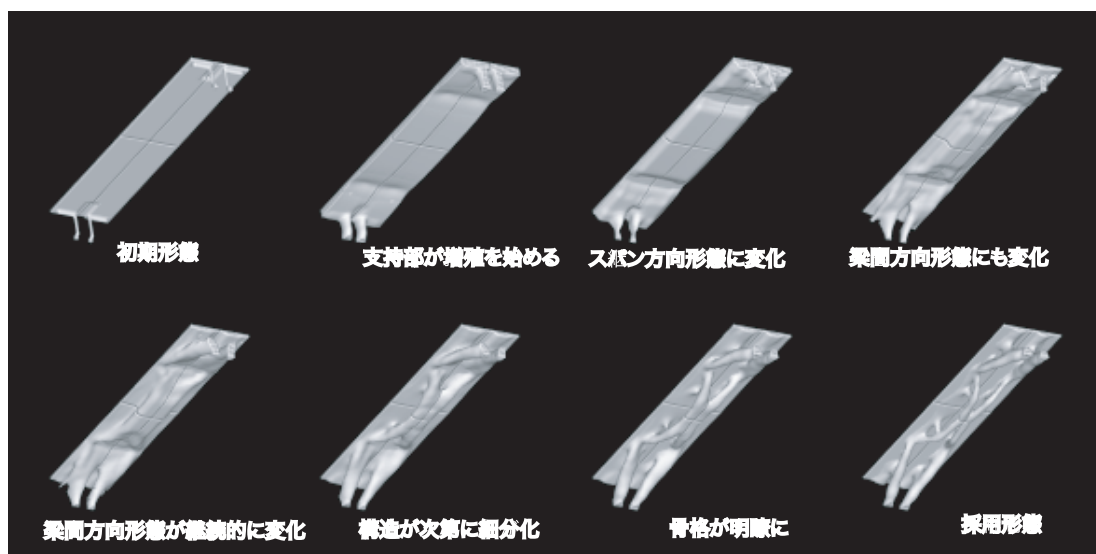


Fig. 8.6: フィレンツェ新駅コンペ案・構造形態創生

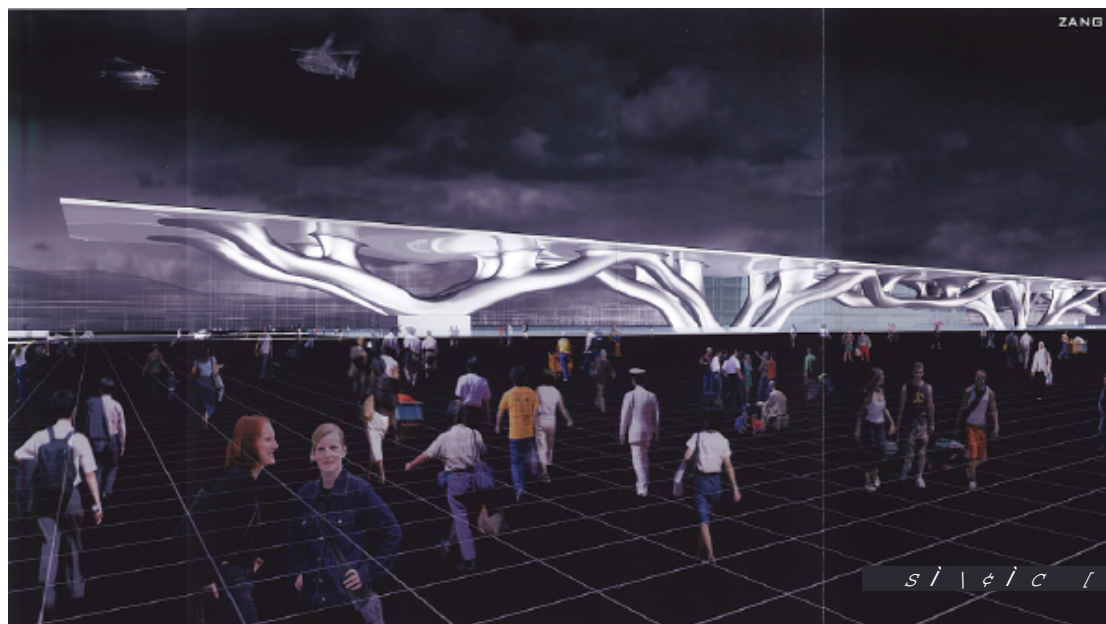


Fig. 8.7: フィレンツェ新駅コンペ案 (設計: 磯崎新アトリエ + 佐々木睦朗構造計画研究所)

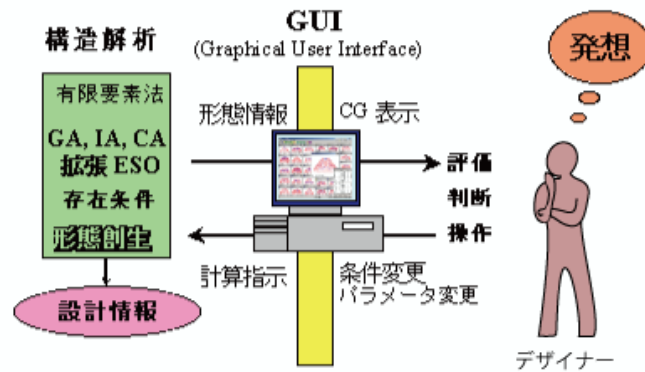


Fig. 8.8: 構造形態の発想を支援するシステム

り堅牢に築き上げられた非線形計画法の理論とコンピュータ技術である。前者は構造形態創生の骨格として用いられ、後者はその高速演算と人間の持つ感性とのインターフェースとして用いられる。数学的、物理的に明示可能な部分については前者が、人間の感性の手助けが必要な部分については後者が受け持つのである。建築構造物の設計に人間の持つ直感や感性が重要で不可欠なものであることは今後も不変だが、満たすべき力学的条件などをクリアする設計解候補を瞬時に次々と提案できる道具の出現が、デザイナーの持つ感性をさらに磨き上げることが期待できる（図8.8）。

人間に固有の、人間に本質的な、創造的営みとされた「デザイン」に、構造力学という科学に裏付けされた「理論」が導入された時、そこには「理論的デザイン」と呼ぶべきものが予見できる。構造力学で培われてきた理論を新しいデザインツールとしてものづくりの場に発信すること。21世紀において構造力学が担うべき新しい役割がここにある。



## 関連図書

- [1] *Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning*. Addison-Wesley Publishing Company.
- [2] *Adaptation in Natural and Artificial Systems: An Introductory Analysis with Applications to Biology, Control, and Artificial Intelligence*. the MIT Press, Cambridge, Massachusetts, London, England, 1992.
- [3] M. P. Bendsoe and N. Kikuchi. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 71, pp. 197–224, 1988.
- [4] Y.M. Xie and G.P. Steven. *Evolutionary Structural Optimization*. Springer-Verlag, 1997.
- [5] 河村拓昌, 大森博司. 遺伝的アルゴリズムによる立体トラス構造物の形態創生. 日本建築学会構造系論文集, No. 538, pp. 115–121, 2000.
- [6] 河村拓昌, 大森博司. 遺伝的アルゴリズムによる接合状態を考慮した離散的構造物の形態創生. 日本建築学会構造系論文集, No. 555, pp. 121–128, 2002.
- [7] 河村拓昌, 長田宗平, 大森博司. 遺伝的アルゴリズムによるフレーム構造物の位相設計. 構造工学論文集, Vol. 47B, pp. 1–6, 2001.
- [8] 山川浩 (編). 最適設計ハンドブック -基礎・戦略・応用-. 朝倉書店.
- [9] 大森博司, 鬼頭伸彰. 遺伝的アルゴリズムを用いたトラス構造物の形態創出. 日本建築学会構造系論文集, No. 520, pp. 85–92, 1999.
- [10] 大森博司, 崔昌禹. 等値線を利用した拡張 esd 法による構造形態の創生. 日本建築学会構造系論文集, No. 539, pp. 87–94, 2001.
- [11] 大森博司, 崔昌禹. 拡張 esd 法による構造形態の創生 - 多目的適応型構造とシェル構造への適応 -. 日本建築学会構造系論文集, No. 552, pp. 109–116, 2002.
- [12] 半谷裕彦. 構造形態の解析と創生 (応用力学シリーズ 5), pp. 10–13, 40–43, 100–105. 日本建築学会, 1998.

- [13] 本間俊雄, 加治広之, 登坂宣好. 免疫アルゴリズムによるトラス構造の多目的最適化と解の多様性. 構造工学論文集, Vol. 49B, , 2003.
- [14] 本間俊雄, 登坂宣好, 角広幸. 自律分散アプローチによる逆問題の計算法. 日本建築学会構造系論文集, No. 526, pp. 68-76, 1999.