

# 解析力学講義

井上 順一郎

# 目次

<b>第 1 章</b>	<b>ニュートン力学</b>	<b>1</b>
1.1	ニュートンの運動法則	1
1.2	質点の 1 次元運動	2
1.2.1	運動量保存則とエネルギー保存則	2
1.2.2	運動の形態	2
1.2.3	保存力とポテンシャル	3
1.2.4	バネの単振動：運動方程式の積分	4
1.3	質点の 2 次元運動	5
1.3.1	極座標表示	5
1.3.2	角運動量保存則	6
1.4	練習問題	7
<b>第 2 章</b>	<b>中心力と運動</b>	<b>9</b>
2.1	運動方程式	9
2.2	運動方程式の解と軌跡	10
2.3	惑星の運動	11
2.3.1	距離の逆数に比例する引力的中心力	11
2.3.2	斥力的中心力の場合	14
2.4	練習問題	15
<b>第 3 章</b>	<b>散乱問題</b>	<b>16</b>
3.1	散乱角	16
3.2	散乱断面積	17
3.3	ラザフォードの散乱公式	19
3.4	練習問題	19
<b>第 4 章</b>	<b>ラグランジェアンとラグランジェ方程式</b>	<b>21</b>
4.1	ラグランジェ方程式	21
4.2	一般速度、一般座標、ラグランジェアンとラグランジェ方程式	22
4.3	ラグランジェ方程式の導出	23
4.4	循環座標と保存則	25

4.5	練習問題	26
<b>第5章</b>	<b>微小振動</b>	<b>28</b>
5.1	1自由度の振動	28
5.2	多自由度の振動	30
5.2.1	多自由度系のラグランジェアン	31
5.2.2	運動方程式と固有（規準）振動	32
5.2.3	$A_j^{(\ell)}$ の直交関係と規格化	33
5.3	例題	34
5.3.1	バネで連結された2つの質点	34
5.3.2	2重振り子	36
5.4	練習問題	38
<b>第6章</b>	<b>剛体の運動</b>	<b>40</b>
6.1	剛体の定義と剛体の運動の特徴	40
6.1.1	速度	41
6.1.2	角運動量	42
6.1.3	慣性テンソルの導入	43
6.1.4	運動エネルギー	44
6.2	慣性テンソルと慣性モーメント	45
6.2.1	重心と回転中心とが一致しない場合の慣性モーメント	46
6.2.2	角運動量と回転ベクトルとの関係	48
6.2.3	運動エネルギーの具体的な表示	48
6.3	練習問題	49
<b>第7章</b>	<b>剛体のラグランジェアンと運動方程式</b>	<b>51</b>
7.1	剛体のラグランジェアン	51
7.2	運動方程式 - 簡単な例	52
7.3	拘束条件のある場合の運動	53
7.4	剛体の運動方程式：一般型	55
7.4.1	剛体のラグランジェアン	55
7.4.2	並進運動	56
7.4.3	回転運動	57
7.5	例題	58
7.5.1	物理振り子	58
7.5.2	斜面を転がる円柱	59
7.6	練習問題	61

<b>第 8 章</b>	<b>オイラー角とコマの運動</b>	<b>62</b>
8.1	オイラー角 . . . . .	62
8.2	下端が固定された対称コマ . . . . .	63
8.2.1	角運動量保存則 . . . . .	64
8.2.2	エネルギー保存則と運動の形態 . . . . .	65
8.3	練習問題 . . . . .	66
<b>第 9 章</b>	<b>変分原理</b>	<b>68</b>
9.1	変分法 . . . . .	68
9.2	条件付き変分法 (Lagrange の未定係数法) . . . . .	70
9.3	最小作用の原理 . . . . .	70
9.4	練習問題 . . . . .	71
<b>第 10 章</b>	<b>仮想仕事の原理</b>	<b>74</b>
10.1	仮想仕事の原理 . . . . .	74
10.2	ダランベールの原理 . . . . .	75
10.3	ラグランジェ方程式の導出 . . . . .	75
10.4	練習問題 . . . . .	77
<b>第 11 章</b>	<b>ハミルトンの原理</b>	<b>78</b>
11.1	ハミルトン方程式 . . . . .	78
11.2	ハミルトンの原理 . . . . .	79
11.3	ポワッソン括弧式 . . . . .	80
11.4	例題 1次元調和振動子 . . . . .	81
11.5	正準変換 . . . . .	82
11.6	ハミルトン・ヤコビの方程式 . . . . .	83
11.7	練習問題 . . . . .	85

この講義ノートは力学1及び演習、力学2及び演習で用いたものを解析力学としてまとめたものである。1年間を通した講義であり、演習を加えてじっくりと行う内容となっている。半年で済ませるには、講義内容を取捨選択する必要があるが、ラグランジェアン、微小振動および剛体の運動には時間をかけたい。

本書の内容は、「力学」ランダウ・リフシッツ(東京図書)をベースにしている。ランダウシリーズの教科書はどれもレベルが高いものであり、「力学」もそうである。本書では式展開など丁寧に記述した。四則演算と簡単な微分・積分、3行3列までの行列演算及び内積・外積のベクトル演算の知識を必要とするだけである。時間をかけて式を追って頂きたい。

参考書としては、ランダウの「力学」以外に次のものが挙げられる。

- 1) 「一般力学入門」: 渡辺慎介著 培風館
- 2) 「力学」「解析力学」: 物理入門シリーズ 岩波書店
- 3) 「古典力学」: ゴールドシュタイン 著 吉岡書店
- 4) 「解析力学」: テル・ハール 著 みすず書房
- 5) 「なっとくする解析力学」 都築卓司 著 講談社

# 第1章 ニュートン力学

この章ではニュートンの運動法則に基づいた運動の記述を復習する。1個の質点の1次元および2次元運動について考察する。運動の形態には、2つのタイプしか存在しないことが示される。

## 1.1 ニュートンの運動法則

### 慣性の法則

すべての物体は、外力によってその状態を変えられない限り、その静止の状態あるいは一直線上の一様な運動の状態をそのまま続ける。

### 作用・反作用の法則

質点1が質点2に力  $\mathbf{F}_{12}$  を及ぼしている時には、必ず同時に質点2は質点1に力  $\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$  を及ぼす。

### 運動方程式 (Equation of motion)

物体の運動の変化は、物体に働く力に比例し、その力が作用する直線上に生じる。

- 質点の位置  $\mathbf{r} = (x, y, z)$
- 速度  $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$
- 加速度  $\mathbf{a} = d^2\mathbf{r}/dt^2$
- 質点の質量  $m$
- 力  $\mathbf{F}$
- 運動方程式

$$\mathbf{F} = m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \quad (1.1)$$

初期条件を与え、この微分方程式を解くことにより、物体の運動（物体の位置の時間変化）が求まる。

力学の目的は、この運動方程式に基づいて物体の運動がどのように記述されるか、説明することにある。

## 1.2 質点の1次元運動

### 1.2.1 運動量保存則とエネルギー保存則

力の働かない1個の質点の運動方程式は、 $m\dot{v} = F = 0$ 。したがって、これを積分して、

$$mv = P \quad (1.2)$$

が得られる。 $P$  は積分定数であり一定である。

力  $F$  が作用している質量  $m$  の質点の一次元運動を表す運動方程式は

$$m \frac{d^2x}{dt^2} \equiv m\ddot{x} = F(x) \quad (1.3)$$

となる。このような運動方程式は時間について2階の微分方程式である。このことは、初期条件として物体の位置と速度が与えられれば、それ以後の物体の運動が決定するという自然の法則に対応している。運動方程式を解いて、物体の位置と時間の関係を求めることが力学の重要な問題といえる。

(1.3) 式に  $\dot{x}$  をかけて積分を一度行ってみよう。この時、ポテンシャルエネルギーを、

$$U(x) = - \int_{x_0}^x F(x) dx \quad (1.4)$$

と定義すると、次のエネルギー保存則が導かれる。

$$\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + U(x) = E \quad (1.5)$$

このようにして、運動方程式を一回積分することでエネルギー保存則が得られる。このことは運動量保存則の場合も同様であった。

上式は変数分離によって次の積分の形に変形できる。

$$\int dt = \int dx \left[ \frac{2}{m} \{E - U(x)\} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (1.6)$$

これから、 $t = t(x)$  が得られ、これを逆に解いて  $x(t)$  が得られる。

### 1.2.2 運動の形態

ポテンシャルエネルギー  $U(x)$  の  $x$  依存性とエネルギー保存則から、この質点の運動の形態として基本的に2つの種類があることがわかる。質量は正の値であるから、エネルギー保存則から  $E - U(x) \geq 0$  となる。この条件を満たす領域には二つのタイプがある。一つは図 1-1 において  $x_1 \leq x \leq x_2$  の領域の限られた振動的運動であり、もう一つは、 $x_3 \leq x$  の領域の散乱的運動である。

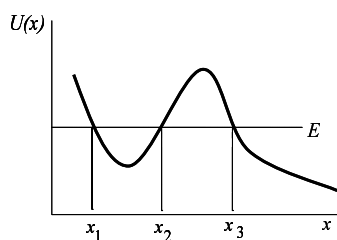


図 1.1: 1次元運動の領域

### 1.2.3 保存力とポテンシャル

(1.5) 式は1次元系の場合であった。3次元の場合にはもっと一般的に考える必要がある。平面上で点AからBまで質量  $m$  の質点が運動したときのエネルギー保存は

$$\int_A^B \mathbf{F} d\mathbf{r} = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 \quad (1.7)$$

で与えられる。右辺は運動エネルギー変化、左辺は仕事量である。

ここで注意しなければならない点は、仕事量をきめる積分が、積分経路のとり方に依存することである。1次元の場合には、経路は1つしかなくこの問題は現れなかった。積分  $\int_A^B \mathbf{F} d\mathbf{r}$  が積分経路によらず、 $\int_A^B \mathbf{F} d\mathbf{r} = U(\mathbf{r}_A) - U(\mathbf{r}_B)$  のように位置の関数  $U(\mathbf{r})$  のA、Bでの値の差として決まるとき、力  $\mathbf{F}$  を保存力、 $U(\mathbf{r})$  をそのポテンシャルという。この場合にはエネルギー保存則は、

$$\frac{1}{2}mv_A^2 + U(\mathbf{r}_A) = \frac{1}{2}mv_B^2 + U(\mathbf{r}_B) = \text{constant} \quad (1.8)$$

となる。

保存力  $\mathbf{F}$  とポテンシャル  $U(\mathbf{r})$  の関係を微分型であらわすと、

$$\mathbf{F} = -\nabla U(\mathbf{r}) \quad (1.9)$$

であり、力  $\mathbf{F}$  が保存力 (2次元の場合) かどうかは

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \quad (1.10)$$

が成立するかどうかで判定する。



## 1.2.4 バネの単振動：運動方程式の積分

質量  $m$  の質点のついたバネ定数  $k$  のバネの単振動を考えよう。バネを伸ばした時、バネの伸び  $x$  に比例する復元力が働く。したがって、運動方程式は、

$$m\ddot{x} = -kx \quad (1.11)$$

となる。この型の解法手順は次の通りである。

$\omega^2 = k/m$  とおくと、

$$\ddot{x} = -\omega^2 x \quad (1.12)$$

この方程式を満たす解（特殊解）を見つける。 $x = e^{\lambda t}$  とおいて、(1.12) 式を満たすように  $\lambda$  を決めると、特殊解は自然に2つ（2階の微分方程式なので2つ特殊解が存在する）求まる。今の場合、 $\lambda^2 = -\omega^2$  となるので  $\lambda = \pm i\omega$  の2つ、したがって、特殊解は  $x = e^{i\lambda t}$  と  $x = e^{-i\lambda t}$  の2つとなる。

また、 $\cos \omega t$  と  $\sin \omega t$  とが (1.12) 式を満たすことはすぐにわかる。したがって、これらが特殊解となっていることがわかる。

得られた特殊解を  $Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}$  のように1次結合させたものも、(1.12) 式を満たす。これを一般解という。この一般解が (1.12) 式の微分方程式の解である。

$e^{\pm i\omega t} = \cos \omega t \pm i \sin \omega t$  を用いると、 $x = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}$  は

$$x = A(\cos \omega t + i \sin \omega t) + B(\cos \omega t - i \sin \omega t) \quad (1.13)$$

$$\begin{aligned} &= (A + B) \cos \omega t + i(A - B) \sin \omega t \\ &= A' \cos \omega t + B' \sin \omega t \end{aligned} \quad (1.14)$$

となる。したがって、 $\cos \omega t$  と  $\sin \omega t$  を特殊解としても同じことになる。ただし、 $x$  が位置を表していれば実数であり、 $\cos \omega t$  と  $\sin \omega t$  も実数なので、 $A'$  と  $B'$  は実数でなければならない。したがって、一般には  $A$  と  $B$  は複素数となる。

$A$  と  $B$ （または  $A'$  と  $B'$ ）は未知の定数であり、これらは初期条件から決定する。(1.13) 式を次のように変形してもよい。

$$\begin{aligned} x &= A' \cos \omega t + B' \sin \omega t \\ &= C \cos(\omega t + \delta) \end{aligned} \quad (1.15)$$

$A' = C \cos \delta$ 、 $B' = C \sin \delta$  である。単振動の場合には、 $C$  は振幅、 $\delta$  は位相である。

## 1.3 質点の2次元運動

### 1.3.1 極座標表示

力、位置、速度、加速度などはベクトルである。したがって、それらを指定するために座標系が必要である。座標系には直交(デカルト)座標系、極座標系、円筒座標系などがある。ここでは、2次元極座標について考える。 $x-y$ 平面上での質量  $m$  の1個の質点の運動を考える。

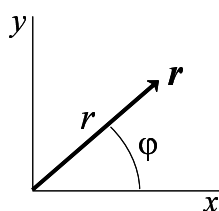


図 1.2: 2次元極座標

$$\mathbf{a} = (\ddot{x}, \ddot{y}) = \mathbf{F} = (F_x, F_y) \quad (1.16)$$

ここで座標を

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \end{aligned} \quad (1.17)$$

と変換し、極座標表示での速度ベクトルと加速度ベクトルを求める。(1.17)式を時間で微分すると、

$$\begin{aligned} v_x = \dot{x} &= \dot{r} \cos \varphi - r \sin \varphi \dot{\varphi} \\ v_y = \dot{y} &= \dot{r} \sin \varphi + r \cos \varphi \dot{\varphi} \end{aligned} \quad (1.18)$$

$$\begin{aligned} a_x = \ddot{x} &= \ddot{r} \cos \varphi - 2\dot{r}\dot{\varphi} \sin \varphi - r \cos \varphi \dot{\varphi}^2 - r \sin \varphi \ddot{\varphi} \\ a_y = \ddot{y} &= \ddot{r} \sin \varphi + 2\dot{r}\dot{\varphi} \cos \varphi - r \sin \varphi \dot{\varphi}^2 + r \cos \varphi \ddot{\varphi} \end{aligned} \quad (1.19)$$

となる。

一般のベクトル  $\mathbf{B} = (B_x, B_y)$  の  $r$  および  $\varphi$  成分  $B_r$  と  $B_\varphi$  は

$$\begin{aligned} B_r &= B_x \cos \varphi + B_y \sin \varphi \\ B_\varphi &= -B_x \sin \varphi + B_y \cos \varphi \end{aligned} \quad (1.20)$$

の関係にあるので、これを用いると、極座標表示での速度ベクトル  $\mathbf{v} = (v_r, v_\varphi)$  と加速度ベクトル  $\mathbf{a} = (a_r, a_\varphi)$  は各々

$$\begin{aligned} v_r &= \dot{r} \\ v_\varphi &= r\dot{\varphi} \end{aligned} \quad (1.21)$$

および

$$\begin{aligned} a_r &= \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 \\ a_\varphi &= 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} \end{aligned} \quad (1.22)$$

となる。

### 1.3.2 角運動量保存則

角運動量  $\mathbf{M}$  の定義は  $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$  で与えられる。運動方程式  $\dot{\mathbf{p}} = m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}$  に  $\mathbf{r}$  をかけると、 $\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$  となり、また、 $\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}}$  である。これら 2 式より

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \equiv \mathbf{N} \quad (1.23)$$

となる。ここで  $\mathbf{N}$  は回転力 (トルク) である。したがって、1 個の質点に働く回転力がゼロであれば、角運動量は保存する、すなわち、

$$\mathbf{r} \times \mathbf{p} \equiv \mathbf{M} \quad (1.24)$$

が一定である。

角運動量の時間微分がトルク、運動量の時間微分が力、という対応関係に注目せよ。すなわち、回転運動の方程式、 $\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{N}$  であり、直線運動の方程式  $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}$  と対をなしている。

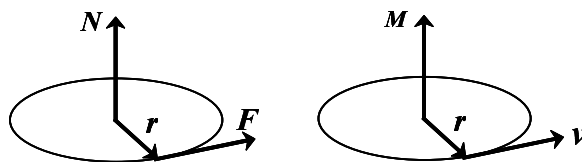


図 1.3: 左 : 力  $\mathbf{F}$  とトルク  $\mathbf{N}$  との関係。右 : 速度  $\mathbf{v}$  と角運動量  $\mathbf{M}$  との関係。

## 1.4 練習問題

- 問 1 座標表示での速度、加速度の表式 (1.21) 式、(1.22) 式を確かめよ。
- 問 2 重力加速度を  $g$  として、質量  $m$  の質点の自由落下運動を求めよ。初期条件は  $t = 0$  で高さゼロ、速度ゼロとする。
- 問 3 初速度  $u$  で、地表とのなす角度が  $\theta$  となる方向に質量  $m$  の質点を放り投げた。その後の質点の運動を求めよ。重力加速度は  $g$  とする。
- 問 4 ばね定数  $K$  のばねの一端に質量  $m$  の質点を取り付けられ、他端は固定されている。ばねの伸びを  $x$  とした時、質点の運動方程式はどのようになるか。また、 $t = 0$  で  $x = x_0$  となるようにばねを伸ばして静かに離れた後の質点の運動を決定せよ。ただし、重力は無視することとする。
- 問 5 長さ  $\ell$  の糸の端に質量  $m$  の質点を取り付けられ、他端は固定されている。このおもりを振動させるときの運動方程式を求めよ。重力加速度は  $g$  とする。振幅が十分小さいとして、この振動の周期、振動数を求めよ。ここで、 $\sin \theta \sim \theta$  の関係を用いよ。

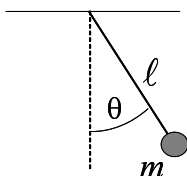


図 1.4: 単振り子の運動

- 問 6 外力が働かない場合、2つの質点 (質量は  $m_1, m_2$ ) の衝突前後において運動量が保存することを示せ。
- 問 7 互いに力を及ぼしあう2つの質点の角運動量保存則を導け。
- 問 8 物体の自由落下を表す運動方程式  $m\ddot{y} = -mg$ 、単振動の運動方程式  $m\ddot{x} = -kx$  より各々の運動に対するエネルギー保存則を導け。
- 問 9 両端を固定して、長さ  $\ell$  の糸を強く引っ張る。糸の midpoint に質量  $m$  の質点を取り付けて糸と直角の方向に少し引っ張って放す。このときのポテンシャルエネルギーを求め、質点の運動を求めよ。

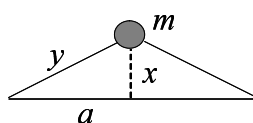


図 1.5: 糸の張力による振動

問 10 (1.6) 式に重力ポテンシャル  $U(x) = -mgx$  を用いて、 $x(t)$  の表式を求めよ。初期条件は  $t = 0$  で、 $x = 0, \dot{x} = 0$  とせよ。

問 11 平面上を運動する質点に働く力の成分が、質点の座標を  $(x, y)$  として、 $F_x = \alpha xy, F_y = \beta y^2$  で与えられる時、この力が保存力がどうか調べよ。また、 $x$  軸上の点  $A = (a, 0)$  から  $y$  軸上の点  $B = (0, a)$  まで、円周にそって質点が移動する場合と、弦に沿って移動する場合の仕事量を比較せよ。

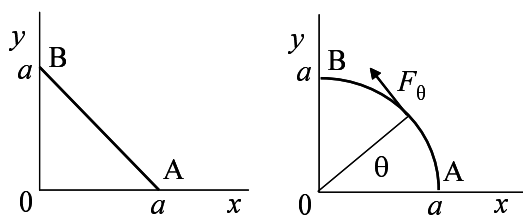


図 1.6: 保存力と質点の運動経路

問 12 (1.7) 式を証明せよ。

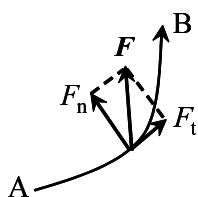


図 1.7: 質点の径路とエネルギー

問 13 (1.9) 式, (1.10) 式を証明せよ。

## 第2章 中心力と運動

以下では2次元空間での質点の運動を考察する．この結果は惑星の運動に適用できる．後者は3次元空間での運動であるが，角運動量保存則があるため，運動は平面内に限られ，このため2次元空間での取り扱いで十分となる．

### 2.1 運動方程式

前章で述べたように、2次元運動の加速度を極座標表示すると

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 \quad (2.1)$$

$$a_\varphi = 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) \quad (2.2)$$

となる。また、力  $\mathbf{F}$  に対して (1.20) 式が成立するので、

$$F_r = F_x \cos \varphi + F_y \sin \varphi \quad (2.3)$$

$$F_\varphi = -F_x \sin \varphi + F_y \cos \varphi \quad (2.4)$$

更に、力  $\mathbf{F}$  に対してポテンシャル  $U(x, y)$  を定義すると、 $\mathbf{F} = -\nabla U$  であり

$$\frac{\partial U}{\partial r} = -(F_x \cos \varphi + F_y \sin \varphi) = -F_r \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi} = -r(-F_x \sin \varphi + F_y \cos \varphi) = -rF_\varphi \quad (2.6)$$

が得られる。したがって、2次元の運動に対して、次の運動方程式が成立することになる。

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = -\frac{\partial U}{\partial r} = F_r \quad (2.7)$$

$$m \frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = -\frac{\partial U}{\partial \varphi} = rF_\varphi \quad (2.8)$$

ここで、 $F_\varphi = -(\nabla U)_\varphi = -(\partial U / \partial \varphi) / r$  を用いた。  $\nabla U$  に  $1/r$  の因子がつく理由は次の通りである。  $\varphi$  方向に質点の位置を  $\delta \ell$  移動させたときのポテンシャル変化を  $\delta U$  とすると、そのときの傾きは、 $\delta U / \delta \ell = \delta U / r \delta \varphi$

となる。ポテンシャルが角度に依存しない場合には、 $F_\varphi = 0$  であり、このような力を中心力と呼ぶ。この場合には、

$$m \frac{d}{dt}(r^2 \dot{\varphi}) = 0$$

となり、 $mr^2 \dot{\varphi} = \text{一定}$  が得られる。これは角運動量保存則に他ならない。

## 2.2 運動方程式の解と軌跡

中心力の場合には、運動方程式 (2.7) (2.8) 式は1回積分できて、エネルギー保存則と角運動量保存則を与える。すなわち、

$$E = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + U(r) \quad (2.9)$$

$$M_z = mr^2 \dot{\varphi} \quad (2.10)$$

が得られる。これら2つの式から、 $\dot{\varphi}$  を消去すると、

$$E = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \frac{M_z^2}{2mr^2} + U(r) \quad (2.11)$$

となる。これは、変数分離法によって次のように積分型に書き換えることができる。

$$t = \int dt = \int dr \left[ \frac{2}{m}(E - U(r)) - \frac{M_z^2}{m^2 r^2} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (2.12)$$

この積分を実行することにより、時間の関数としての  $r(t)$  が求まることになる。角度  $\varphi$  の時間変化は、 $M_z = mr^2 \dot{\varphi}$  より

$$\int d\varphi = \int \frac{M_z}{mr^2} dt = \int \frac{M_z}{mr^2} \left[ \frac{2}{m}(E - U(r)) - \frac{M_z^2}{m^2 r^2} \right]^{-\frac{1}{2}} dr \quad (2.13)$$

より、 $\varphi(r)$  が得られ、これと  $r(t)$  とを組み合わせ、 $\varphi(t)$  がもとまる。

このようにして、質点の運動の軌跡  $\mathbf{r}(t) = (r(t), \varphi(t))$  が決まることになる。ここで、いくつかの点に注意しておく必要がある。

- 1次元の運動との類似性

$U(r) + M_z^2/2mr^2 \equiv U_{eff}(r)$  とおくと、エネルギー保存則は、

$$E = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + U_{eff}(r) \quad (2.14)$$

となり、1次元運動と類似していることがわかる。ただし、 $r \geq 0$  であることに注意すること。

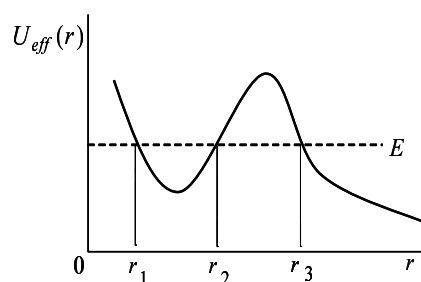


図 2.1: 運動領域を示す図

- 運動領域

1次元の場合の図と同様に、質点のエネルギーと有効ポテンシャル  $U_{eff}(r)$  との兼ね合いで、散乱的な運動と、運動領域の限られた(有界な)運動との2つに分けられる。どちらの場合でも、角運動量が保存しているため  $\dot{\varphi} = M_z/mr^2$  の符号は一定であることに注意せよ。

- 2次元有界運動

一般に軌跡が閉じるとは限らず、軌道は  $r_1 \leq r \leq r_2$  の領域を埋め尽くす。しかし、万有引力  $U(r) = -1/r$  と3次元振り子  $U(r) \propto r^2$  の場合には軌跡は閉じる。

## 2.3 惑星の運動

### 2.3.1 距離の逆数に比例する引力的中心力

前節で調べたように、ポテンシャルエネルギー  $U(r)$  のもとで運動する質点の軌跡は、

$$\int d\varphi = \int \frac{M_z}{mr^2} dt = \int \frac{M_z^2}{mr^2} \left[ \frac{2}{m}(E - U(r)) - \frac{M_z^2}{m^2 r^2} \right]^{-\frac{1}{2}} dr \quad (2.15)$$

で与えられる。距離の逆数に比例する中心力を考えることにしよう。重力場での引力、クーロン場での引力、斥力がその例である。

$$U(r) = -\frac{b}{r} \quad (2.16)$$

引力の場合には、 $b > 0$  である。有効ポテンシャル  $U_{eff}$  は、

$$U_{eff} = -\frac{b}{r} + \frac{M_z^2}{2mr^2} \quad (2.17)$$



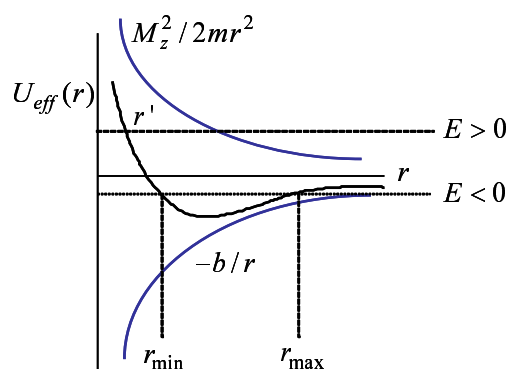


図 2.2: 有効ポテンシャル

であり、 $E > 0$  の場合には、 $r'_{\min} < r$  に、 $E \leq 0$  の場合には、 $r_{\min} \leq r \leq r_{\max}$  に運動が制限される。運動の軌道は、(2.15) 式より、

$$\int d\varphi = \varphi = \frac{M_z}{\sqrt{2m}} \int dr \frac{1}{r^2 \sqrt{E + \frac{b}{r} - \frac{M_z^2}{2mr^2}}} \quad (2.18)$$

で与えられる。ここで、 $u = 1/r$ ,  $a = M_z^2/2m$  とおくと、

$$\varphi = -\sqrt{a} \int du \frac{1}{\sqrt{E + bu - au^2}} \quad (2.19)$$

となる。この積分は(積分公式により)

$$\varphi = -\sqrt{a} \left[ -\frac{1}{\sqrt{a}} \arcsin \frac{-2au + b}{\sqrt{b^2 + 4aE}} \right] \quad (2.20)$$

となる。ここで、 $a > 0$  であるから  $E + bu - au^2 > 0$  であるためには、 $E + bu - au^2 = 0$  が実根を持つこと、すなわち、 $b^2 - 4aE > 0$  でなければならない。

(2.20) 式は

$$\sin \varphi = \frac{-2au + b}{\sqrt{b^2 + 4aE}} \quad (2.21)$$

となるので、 $\varphi \rightarrow \varphi - \pi/2$ ,  $\varepsilon = \sqrt{1 + 2M_z^2 E / mb^2}$ ,  $\lambda = M_z^2 / mb$  とおくと、

$$r = \frac{\lambda}{1 + \varepsilon \cos \varphi} \quad (2.22)$$

となる。これが質点の軌道を表す式である。

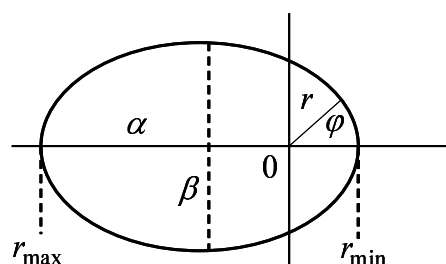


図 2.3: 楕円軌道

## 楕円軌道

$E < 0$  の場合には、 $0 < \varepsilon = \sqrt{1 + 2EM_z^2/mb^2} < 1$  であるから、 $1 - \varepsilon > 0$  となり、予想通り楕円軌道となる。この時、 $r$  は有界であり、その最小値、最大値を  $r_{\min}, r_{\max}$  とすると、これらは各々  $\varphi = 0, \varphi = \pi$  に対応することが、(2.22) 式よりわかる。すなわち、

$$\frac{\lambda}{r_{\min}} = 1 + \varepsilon \quad (2.23)$$

$$\frac{\lambda}{r_{\max}} = 1 - \varepsilon \quad (2.24)$$

楕円軌道の長軸、短軸は、それぞれ、 $\alpha = \lambda/(1 - \varepsilon^2) = b/2|E|, \beta = \lambda/\sqrt{1 - \varepsilon^2} = M_z/\sqrt{2m|E|}$  と与えられる。長軸の長さは角運動量に依存しないことがわかる。

- 面積速度

質点の楕円運動において、微小時間  $\delta t$  の間に、微小扇形の面積が  $r^2 \delta \varphi / 2$  だけ変化した時、その面積の時間変化

$$\frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} \equiv f \quad (2.25)$$

を面積速度と呼ぶ。

- 楕円運動の周期とケプラーの第3法則

角運動量を面積速度を用いて表すと、 $M_z = 2mf$ 。これを1周期  $T$  にわたって時間積分する。角運動量は定数なので、

$$\int_0^T M_z dt = M_z T = 2m \int_0^T \frac{df}{dt} dt = 2m \int_0^T df \quad (2.26)$$

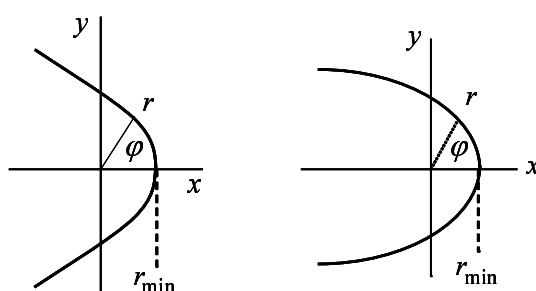


図 2.4: 双曲線運動 (左) と放物線運動 (右)

となるが、微小面積  $df$  を 1 周期にわたって積分すると、楕円の面積  $\pi\alpha\beta$  となるので、結局周期として、

$$\begin{aligned} T &= \frac{2m\pi\alpha\beta}{M_z} \\ &= b\pi\sqrt{\frac{m}{2|E|^3}} \end{aligned} \quad (2.27)$$

が得られる。これをケプラーの第 3 法則と言う。

### 双曲線運動

$E > 0$  の場合には  $\epsilon > 1$  であり、質点の運動は双曲線を描く。 $\varphi = 0$  で中心力の原点からの距離が最短  $r_{\min} = \lambda/(1 + \epsilon)$  となり、 $\varphi = \pi/2$  の時の距離が  $r = \lambda$  となるような軌道を描く。

### 放物線運動

$E = 0$  では  $\epsilon = 1$  であるので、放物線運動となり、運動は  $r_{\min} = \lambda/2$  となるような図形を描く。全エネルギーはゼロであるので、 $r \rightarrow \infty$  ではポテンシャルエネルギーも運動エネルギーもゼロである。したがって、無限遠方では静止した状態からゆっくりと運動を始めることになる。

### 2.3.2 斥力的中心力の場合

$b < 0$  の場合である。有効ポテンシャルは

$$U_{eff} = \frac{|b|}{r} + \frac{M_z^2}{2mr^2} \quad (2.28)$$

となり、常に正またはゼロである。この場合の軌跡は

$$r = \frac{\lambda}{-1 + \varepsilon \cos \varphi}$$

となる。したがって、有界な運動は存在せず、双曲線運動 ( $E > 0$ )、または放物線運動 ( $E = 0$ ) のどちらかとなる。

## 2.4 練習問題

問 1 中心力  $\mathbf{F} = -\nabla U(r)$  の方向は  $r$  ベクトルの方向と一致することを示せ。

問 2 中心力場における質点の 3 次元空間での運動は 2 次元平面上の運動を考えれば十分であることを示せ。

問 3 (2.7) 式の意味が、 $m\ddot{r} = \text{力} + \text{遠心力}$  であること、また (2.8) 式の意味が、 $z$  方向の角運動量の時間変化 = 回転力であることを示せ。

問 4 エネルギー保存則 (2.9)、角運動量保存則 (2.10) 式を証明せよ。

問 5 軌道を表す式 (2.22) は、 $1 - \varepsilon^2 > 0$  の場合には楕円軌道、 $1 - \varepsilon^2 < 0$  の場合には双曲線軌道、 $1 - \varepsilon^2 = 0$  の場合は放物線軌道、となることを確かめよ。また斥力の場合の軌道は双曲線となることを確かめよ。(放物線軌道は極限でのみ存在)

問 6 質量  $M$ 、半径  $a$  の密度の一樣な球が、その中心から  $x$  の距離 ( $x > a$ ) にある質量  $m$  の質点に及ぼすポテンシャルを求めよ。

問 7 質量  $m$  の質点が、大きさ  $m f(r)$  の中心力を受けて運動する時、その軌道は、

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = -\frac{f(\frac{1}{u})}{h^2 u^2} \quad (2.29)$$

で定まることを示せ。ただし、ここで  $u = 1/r$  であり、 $h$  は面積速度の 2 倍である。

## 第3章 散乱問題

互いに力を及ぼしあう2つの粒子が無限遠方から近づき、方向を変えて再び無限遠方に飛び去る現象、すなわち散乱の問題を取り扱う。この運動を記述する際、原点の取り方に二通りある。一つは、2粒子の重心を原点とするものであり、これを重心系と呼んでいる。この場合には、相対座標、相対速度を用いて運動を記述する必要がある。もう一つは、外界、例えば実験室の何処かに原点をとるものであり、実験室系と呼ばれる。この場合には、2つの粒子の座標を用いる必要がある。以下では、簡単のために、2つの粒子のどちらか一方の質量が他方の質量に比べて格段に大きいとする。こうすると、質量の大きな粒子は静止していると考えてよい。したがって、それを原点とする記述が可能となる。このようにすると、2粒子間の相互作用による散乱を、固定点を中心とする中心力場内の1個の粒子の散乱として取り扱うことができる。

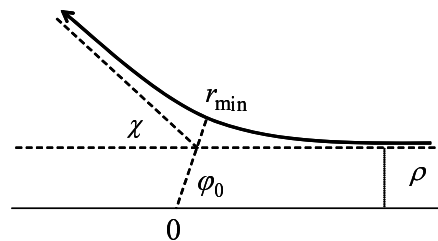


図 3.1: 粒子の散乱の様子

### 3.1 散乱角

図 3.1 のように、無限遠方から入射した粒子が、原点 0 にある散乱体の影響を受け、方向を変えて無限遠方に飛び去るとする。入射エネルギーは  $E > 0$  であり、軌道は双曲線となる。この場合の入射粒子の方向変化、角度  $\chi$  を求めるのが、ここでの問題である。散乱する前に入射粒子が無限遠方にいる時の角度は、 $\varphi = 0$  であり、粒子が最短距離にいる時の角度を

$\varphi = \varphi_0$  とすると、図 3.1 より、

$$\chi = |\pi - 2\varphi_0| \quad (3.1)$$

の関係があることがわかる。 $\varphi_0$  は、粒子が  $r = r_{\min}$  と  $r = \infty$  に存在するときの間の角度であるから、第3章の結果より、

$$\varphi_0 = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{M_z}{r^2} \left[ 2m(E - U(r)) - \frac{M_z^2}{r^2} \right]^{-\frac{1}{2}} dr \quad (3.2)$$

と計算されることになる。

(3.2) 式の中の定数、エネルギー  $E$  と角運動量  $M_z$  とを、入射粒子の初期状態を制御できる量で表すことにしよう。エネルギーは入射粒子の初速  $v_\infty$  を用いて、 $E = mv_\infty^2/2$  と表すことができる。角運動量は、衝突パラメーター  $\rho$  を用いて、 $M_z = m\rho v_\infty$  と書ける(図 3.1 参照のこと)。これらのパラメーターを用いると、(3.2) 式は

$$\varphi_0 = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\frac{\rho}{r^2}}{\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{2U(r)}{mv_\infty^2}}} dr \quad (3.3)$$

となる。この式は、中心力ポテンシャルが既知の時、粒子を打ち込む速さと場所を決めれば、散乱角が決定できることを表している。実際には、入射速度と入射位置を決め、散乱角を測定することから、ポテンシャルの情報を得る実験解析として用いられる。

### 3.2 散乱断面積

ラザフォードが行ったような、原子による粒子線散乱の場合には、入射粒子は微小であり、入射速度は制御できても、入射位置は制御不能である。この場合には、空間的に一様な多くの粒子を入射させ、入射角度から測ってどの方向にどれだけの数の粒子が散乱されたかを測定することになる。すなわち

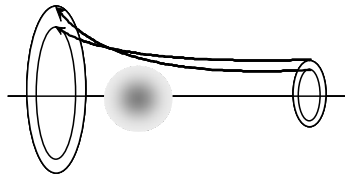


図 3.2: 衝突パラメーターと散乱角の関係

- 散乱実験：多くの同一粒子（いろいろな  $\rho$  の値）を入射させる。 $\rho$  が異なると散乱角が異なる。単位時間あたり、 $[\chi, \chi + d\chi]$  の間の角度に散乱される粒子数  $dN$  を測定する。
- 微分散乱断面積：

$dN$  は入射粒子数に比例するので、 $n =$  単位時間に入射粒子束の横断面の単位面積を通過する粒子数、を定義し、これを用いて、 $d\sigma = dN/n$  を導入する。これを微分散乱断面積と呼ぶ。 $d\sigma$  が面積の次元をもつことは次のようにしてわかる。まず、 $\chi$  と  $\rho$  とが一対一に対応すると仮定する。（この仮定はもっとなものと考えられる。）単位時間あたり  $\chi$  と  $\chi + d\chi$  の間に散乱される粒子数  $dN$  は、 $\rho$  と  $\rho + d\rho$  の間に単位時間あたりに入射する粒子数に等しい。したがって、 $dN = 2\pi n \rho d\rho$  となる。これから、

$$\frac{dN}{n} = d\sigma = 2\pi\rho d\rho \quad (3.4)$$

が得られ、 $d\sigma$  が確かに面積の次元（面積の微分型）を持つことがわかる。

- 中心力ポテンシャルと散乱断面積との関係：  
 (3.3) 式から、 $\rho$  と  $\varphi_0$  の関係が決まり、したがって、 $\rho$  と  $\chi$  との関係が決まる。散乱断面積と  $\chi$  との関係は

$$d\sigma = 2\pi\rho \frac{d\rho}{d\chi} d\chi \rightarrow 2\pi\rho \left| \frac{d\rho}{d\chi} \right| d\chi \quad (3.5)$$

とすればよい。ここで、 $d\rho/d\chi$  は負となりうることも考慮した。実験では、角度  $\chi$  を変えながら散乱される粒子数を測定する。中心力ポテンシャルが与えられていれば、上式の  $d\chi$  の係数が決まり、微分散乱断面積が求まることになる。

- 立体角を用いた表示：  
 $d\chi$  を用いるよりは、微小立体角  $d\Omega = 2\pi \sin \chi d\chi$  を用いたほうが便利なので、(3.5) 式の替わりに、

$$d\sigma = \frac{\rho(\chi)}{\sin \chi} \left| \frac{d\rho(\chi)}{d\chi} \right| d\Omega \quad (3.6)$$

を用いる。

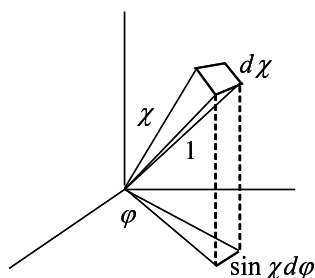


図 3.3: 微小表面積の表現

### 3.3 ラザフォードの散乱公式

これは、クーロン場による荷電粒子の散乱を取り扱うもので、中心力ポテンシャルは  $U(r) = \alpha/r$  で与えられる。 $\alpha$  適当な定数である。以下では、計算手順と得られた結果のみを示すことにする。まず、

$$\varphi_0 = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\frac{\rho}{r^2}}{\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{2U(r)}{mv_{\infty}^2}}} dr \quad (3.7)$$

の積分を実行する必要がある。これには、 $r_{\min}$  が  $1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{2U(r)}{mv_{\infty}^2} = 0$  の解であることに注意すると、

$$\varphi_0 = \arccos \frac{\frac{\alpha}{mv_{\infty}^2 \rho}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha}{mv_{\infty}^2 \rho}\right)^2}} \quad (3.8)$$

が得られる。 $\varphi_0 = (\pi - \chi)/2$  に注意してこれを書き直す。

$$\rho^2 = \frac{\alpha^2}{m^2 v_{\infty}^4} \tan^2 \varphi_0 \quad (3.9)$$

$$= \frac{\alpha^2}{m^2 v_{\infty}^4} \cot^2 \frac{\chi}{2} \quad (3.10)$$

となるので、これから  $d\rho/d\chi$  を計算すると、

$$d\sigma = \pi \left(\frac{\alpha}{mv_{\infty}^2}\right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\chi}{2}} d\Omega \quad (3.11)$$

となる。これがラザフォードの散乱公式である。

### 3.4 練習問題

- 問1 角運動量は、衝突パラメーター  $\rho$  を用いて、 $M_z = m\rho v_{\infty}$  と書けることを確認し、式 (3.3) を求めよ。



問2 半径  $a$  の剛体球の微分散乱断面積、散乱断面積を求めよ。

問3 式 (3.8), (3.10), (3.11) を導け。

## 第4章 ラグランジェアンとラグランジェ方程式

与えられた問題に対して、ニュートンの運動方程式を導くには、適当な座標系をとり、加速度ベクトル、速度ベクトル、位置ベクトルさらには働く力のベクトルを考慮せねばならない。ベクトル考慮して運動方程式を導くことは、しばしば複雑な問題となる。もっと簡単に運動方程式を導く方法はないだろうか。この問に答えるのが、ラグランジェ法である。この手法では、問題となっている系のエネルギーさえわかれば運動方程式を導くことができる。エネルギーはスカラー量なので、複雑な問題の運動方程式も簡単に書き下すことができる。以下ではその手法を説明する。

### 4.1 ラグランジェ方程式

ラグランジェ法では、運動エネルギー  $T$  と位置エネルギー  $U$  を用いてラグランジェアン  $L(x, \dot{x})$  と呼ばれる関数をまず定義する。

$$L(x, \dot{x}) = T - U \quad (4.1)$$

1次元での1個の質点（質量  $m$ ）の問題では、運動エネルギーは

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \quad (4.2)$$

である。位置エネルギー（ポテンシャルエネルギー）は  $x$  のみの関数  $U(x)$  とする。ラグランジェ法での運動方程式は

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad (4.3)$$

で与えられる。この式をラグランジェ方程式という。以下  $L(x, \dot{x})$  を  $L$  と略記することにする。

このラグランジェ方程式から次のニュートン方程式が簡単に導かれる。

$$m\ddot{x} = -\frac{dU(x)}{dx} = F \quad (4.4)$$

## 4.2 一般速度、一般座標、ラグランジェアンとラグランジェ方程式

ラグランジェ法をより一般的にするため、広い意味での座標（一般座標）、および広い意味での速度（一般速度）、を導入してラグランジェアンを書き下すことにする。3次元空間での  $N$  個の質点の運動を考える場合には、運動の自由度は  $3N = f$  となる。したがって、一般座標、一般速度の変数の数としては各々  $f$  個存在する。この場合に運動エネルギー  $T$  とポテンシャルエネルギー  $U$  を一般座標  $\{q_1 \dots q_f\}$ 、と一般速度  $\{\dot{q}_1 \dots \dot{q}_f\}$  とを用いて表すと、ラグランジェアン  $L$  は次のように書ける。

$$L(q_1 \dots q_n, \dot{q}_1 \dots \dot{q}_n) = T(q_1 \dots q_n, \dot{q}_1 \dots \dot{q}_n) - U(q_1 \dots q_n) \quad (4.5)$$

ここで、運動エネルギーは位置と速度の関数、ポテンシャルエネルギーは位置のみの関数とした。ラグランジェの運動方程式は

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, \dots, f) \quad (4.6)$$

であり、一般に自由度  $f$  だけの連立微分方程式である。

運動に束縛条件が存在する場合には、運動の自由度以上の変数を持ち込んでも良い。この場合には、運動方程式の数は自由度の数よりも多くなるが、束縛条件があるので、それらを考慮すると、自由度の数と運動方程式の数は一致することになる。

一般座標は、例えば、直行座標では通常、 $x, y, z$  であり、極座標では、 $r, \theta, \varphi$  である。一般速度はこれらに対応して、 $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$  または、 $\dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}$  である。 $\dot{\theta}$  や  $\dot{\varphi}$  などが速度ではないことに注意すること。例えば、回転速度は  $r\dot{\theta}$  である。

- 簡単な例1：1個の質点の2次元の運動

ラグランジェアン

$$L = T - U = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy \quad (4.7)$$

ラグランジェ方程式

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad (4.8)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \quad (4.9)$$

これらから

$$m\ddot{x} = 0 \quad (4.10)$$

$$m\ddot{y} + mg = 0 \quad (4.11)$$

が得られる。

- 簡単な例2：単振り子の振動

運動エネルギーとポテンシャルエネルギーとをを2次元極座標を用いて表す。質点の座標と速度は次のように変形される。

$$x = l \cos \varphi \quad (4.12)$$

$$y = l \sin \varphi$$

$$\dot{x} = -l \sin \varphi \dot{\varphi}$$

$$\dot{y} = l \cos \varphi \dot{\varphi} \quad (4.13)$$

これらを用いると、

$$L = T - U = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2 + mgl \cos \varphi - mgl \quad (4.14)$$

ラグランジェ運動方程式は、

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \quad (4.15)$$

より、

$$m l^2 \ddot{\varphi} + mgl \sin \varphi = 0 \quad (4.16)$$

振幅が小さければ、 $\sin \varphi \simeq \varphi$  であるから、

$$\ddot{\varphi} + (g/l)\varphi = 0 \quad (4.17)$$

となり、単振動の運動方程式が得られる。

### 4.3 ラグランジェ方程式の導出

ラグランジェ方程式から導いた運動方程式はニュートン方程式となることは具体的に確かめることができた。では、ニュートン方程式からラグランジェ方程式を導くにはどのようにすれば良いであろうか。1次元の1個の質点の運動に対してこのことを調べてみよう。

ニュートン方程式は

$$m\ddot{x} = X \quad (4.18)$$

で与えられる。ここで、座標  $x$  を  $q$  に変換すると、

$$x = \zeta(q, t) = x(q, t) \quad (4.19)$$

と書ける。座標が変換されていることを頭に示す場合には、 $\zeta(q, t)$  を用いるほうが良いが、以下では  $x = x(q, t)$  と表すことにする。

まず、

$$\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial x}{\partial t} \quad (4.20)$$

$$\frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial x}{\partial q} \right) \quad (4.21)$$

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{dx}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x}{\partial q} \right) \quad (4.22)$$

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left( \frac{\partial x}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial x}{\partial t} \right) = \frac{\partial x}{\partial q} \quad (4.23)$$

の関係式が成り立つ。

これらを用いると次の関係式が成立する。

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left( \frac{1}{2} \dot{x}^2 \right) = \ddot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}} + \dot{x} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}} \right) \quad (4.24)$$

$$= \ddot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}} + \dot{x} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x}{\partial q} \right) \quad (4.25)$$

$$= \ddot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}} + \dot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial q} \quad (4.26)$$

$$= \ddot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{1}{2} \dot{x}^2 \right) \quad (4.27)$$

したがって、

$$\ddot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}} = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left( \frac{1}{2} \dot{x}^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{1}{2} \dot{x}^2 \right) \quad (4.28)$$

が成立し、全体に質量  $m$  をかけ、運動エネルギーが  $T = m\dot{x}^2/2$  であることに注意すると、

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = m\ddot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}} = X \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}} = X \frac{\partial x}{\partial q} \quad (4.29)$$

が得られる。ここで、

$$Q \equiv X \frac{\partial x}{\partial q} \quad (4.30)$$

とおく。  $Q$  は一般力と呼ばれるものである。

力  $X$  がポテンシャル  $U$  で決まる場合、 $X = -\partial U/\partial x$  の関係があるので

$$\begin{aligned} Q &= -\frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial q} \\ &= -\frac{\partial U}{\partial q} \end{aligned}$$

となる。

ポテンシャル  $U$  が速度に依存しなければ、 $\partial U/\partial \dot{q} = 0$  なので、ラグランジェアンを  $L = T - U$  と定義して、

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad (4.31)$$

が得られる。

#### 4.4 循環座標と保存則

ラグランジェアン  $L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$  に座標  $q_i$  を含まない時この座標  $q_i$  を循環座標という。この時、

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad (4.32)$$

従って、

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \text{constant} \quad (4.33)$$

となり、これが保存する。

- 3次元空間内の自由粒子：運動量保存

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \quad (4.34)$$

$$U = 0 \quad (4.35)$$

したがって、

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} = \text{constant} \quad (4.36)$$

ラグランジェアンに  $(x, y, z)$  を含まない。これは座標を任意に変化させても系が不変であることを意味する。すなわち、運動量保存は空間の並進不変性の帰結である。

- 中心力場の中の1個の質点の運動：角運動量保存 = 空間の回転不変性

ラグランジェアンは

$$L = \frac{m}{2} \left\{ \dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 + (r\dot{\varphi} \sin \theta)^2 \right\} - U(r) \quad (4.37)$$

となり、その中に  $\varphi$  を含まない。したがって、

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \dot{\varphi} \sin^2 \theta = M_z = \text{constant} \quad (4.38)$$

となり、角運動量が保存する。これは、系を  $z$  軸周りに回転させてもラグランジェアンが変わらないということの帰結である。

- ラグランジェアンに時間  $t$  を顕に含まない場合 = エネルギー保存

$\partial L / \partial t = 0$  であるので、

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i} \ddot{q}_i \quad (4.39)$$

$$= \sum_i \left\{ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i} \ddot{q}_i \right\}$$

$$= \frac{d}{dt} \left\{ \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right\} \quad (4.40)$$

したがって、

$$\frac{d}{dt} \left\{ \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \right\} = 0 \quad (4.41)$$

これから、

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L = \text{const.} \quad (4.42)$$

ここで、

$$L = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{q}_i^2 - U(q_1 \sim q_n) = T - U \quad (4.43)$$

を用いると、 $\text{constant} = T + U = E$  であることがわかる。すなわち、エネルギー保存則が得られたことになる。 $L$  に時間を顕に含まない場合は、時間をずらしても  $L$  は変化せず、運動は不変となる。

## 4.5 練習問題

- 問 1 三次元ポテンシャル中の質量  $m$  の一つの質点の運動方程式をラグランジェアンからもとめよ。

問 2 中心力の働く三次元系における一つの質点のラグランジェアンを極座標で表し、運動方程式をラグランジェ法により求めよ。

問 3 下図のような場合のラグランジェアンを求めよ。ただし、質点 1 (質量  $m$ ) は  $x$  軸上で可動、質点 2 (質量  $m'$ ) は長さ  $\ell$  の糸でぶら下がっており、かつ振動している。

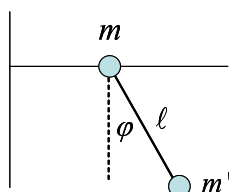


図 4.1: 支点が可動な場合の振り子の振動

問 4 式 (4.42) 中の定数がエネルギーとなることを確かめよ。

問 5 速度  $v_1$  で運動している質量  $m$  の粒子が、一定のポテンシャル  $U_1$  の半空間から、ポテンシャル  $U_2$  一定の半空間に移行する。この時の粒子の運動方向の変化を求めよ。

問 6 半径  $r_0$  の無限に長い円柱を考える。円柱内ではポテンシャルエネルギーは一定値  $U_0$  であり、 $r > r_0$  で無限大となるとする。この円柱内で一つの質点の運動に対して、運動量および角運動量のどの成分が保存されるか、ラグランジェアンを書き下すことにより調べよ。



## 第5章 微小振動

振動の振幅が十分に小さくなるような振動を微小振動と呼ぶ。振幅が小さくなると、振動のほとんどのものは単振動（調和振動）となる。ここでは一般の振動から単振動を導く手続きについて調べることにする。

### 5.1 1自由度の振動

図5.1のような一次元ポテンシャル  $U(q)$  中の質点の運動を考える。ここで  $q$  は一般座標である。 $U(q)$  をその極値を与える  $q_0$  のまわりでテラー展開する。 $dU/dq|_{q=q_0} = 0$  であるので、

$$U(q) \simeq U(q_0) + \frac{dU}{dq}\bigg|_{q=q_0} (q - q_0) + \frac{1}{2} \left( \frac{d^2U}{dq^2} \right)\bigg|_{q=q_0} (q - q_0)^2 + \dots \quad (5.1)$$

$$= U(q_0) + \frac{1}{2} k (q - q_0)^2 + \dots \quad (5.2)$$

となる。ここで、

$$k \equiv \frac{1}{2} \left( \frac{d^2U}{dq^2} \right)\bigg|_{q=q_0} \quad (5.3)$$

とおいた。

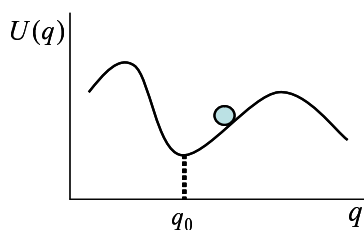


図 5.1: ポテンシャルの形

運動エネルギーは一般には、座標を含んでもよい。したがって、

$$T = \frac{1}{2} a(q) \dot{q}^2 \quad (5.4)$$

と表される。振動が微小の場合には、速度  $\dot{q}^2$  も小さい量となるので、(5.4) 式中の  $q$  を  $q_0$  と置き換えてよい。したがって、ラグランジアンは

$$L = T - U \approx \frac{1}{2}a(q_0)\dot{q}^2 - \frac{1}{2}k(q - q_0)^2 \quad (5.5)$$

となる。これが、一次元単振動のラグランジアン的一般形である。ここで、

$$x \equiv q - q_0 \quad (5.6)$$

とおくと、

$$L = \frac{1}{2}a(q_0)\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2 \quad (5.7)$$

となる。 $x$  がデカルト座標であれば、 $a(q_0)$  は質量である。

• 例題

図 4.2 のようなバネの先端に質量  $m$  のおもりがついて、直線上を微小振動している。バネの長さが  $\ell$  のとき力  $F$  で引っ張られている。このときの振動数を求めよ。

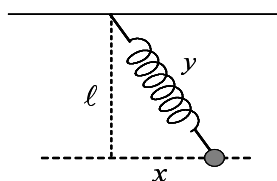


図 5.2: 質点は破線にそって運動する。

解答

ラグランジアン、運動エネルギーはそれぞれ、

$$L = T - U(x) \quad (5.8)$$

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \quad (5.9)$$

である。 $x$  は質点の水平方向位置を表す。ポテンシャル  $U$  をまず  $U(y)$  として表そう。バネの伸びの 2 乗の項までをポテンシャルとして取り入れることにすると、

$$U(y) = U(y_0) + \frac{1}{2}k(y - y_0)^2 \quad (5.10)$$

である。 $y_0$  はバネの自然長であるが、その値は未知である。また  $k$  はバネ定数である。 $y$  を  $x$  を用いて表そう。 $x$  の2次まで残すことにすると、

$$\begin{aligned} U(y) &= U(y_0) + \frac{1}{2}k \left( \sqrt{x^2 + \ell^2} - y_0 \right)^2 \\ &\sim U(y_0) + \frac{1}{2}k \left( \ell + \frac{x^2}{2\ell} - y_0 \right)^2 \\ &\sim U(y_0) + \frac{1}{2}k(\ell - y_0) + \frac{1}{2}k(\ell - y_0) \frac{x^2}{\ell} \end{aligned} \quad (5.11)$$

となる。 $y_0$  と  $k$  は未知数である。わかっていることは、 $y = \ell$  の時、力が  $F$  であることである。したがって、

$$F = \left( -\frac{\partial U}{\partial y} \right)_{y=\ell} = -k(\ell - y_0) \quad (5.12)$$

これを用いると、ポテンシャルが

$$U(y) \sim \frac{1}{2} \frac{|F|}{\ell} x^2 + const. \quad (5.13)$$

となる。したがって、ラグランジェアンが

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{|F|}{2\ell}x^2 \quad (5.14)$$

という単振動のかたちとなる。

運動方程式は、

$$m\ddot{x} + \frac{|F|}{\ell}x = 0 \quad (5.15)$$

となるので、振動数は

$$\omega = \sqrt{\frac{|F|}{m\ell}} \quad (5.16)$$

で与えられる。

## 5.2 多自由度の振動

通常、多くの物体は複雑な振動をする。このような振動の取り扱い、問題とする系を多くの振動子の集まりと考える。このようにすると、結果として自由度の大きな系の振動を取り扱わねばならない。本章ではそのような取り扱いを学ぶ。ここでは、固有振動という新しい概念が登場する。また数学的取り扱いには線形代数の知識が必要となる。

## 5.2.1 多自由度系のラグランジェアン

$n$  粒子系のラグランジェアンは、各々の粒子の質量を  $m_i$  として

$$L = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) - U(r_1, r_2 \cdots r_n) \quad (5.17)$$

と一般に表される。このラグランジェアンを系の運動を記述するのに便利な座標系に変換することにする。 $f$  は自由度の数  $3n$  である。

$$x_i = f_i(q_1, q_2 \cdots q_f) \quad (5.18)$$

$$y_i = g_i(q_1, q_2 \cdots q_f) \quad (5.19)$$

$$z_i = h_i(q_1, q_2 \cdots q_f) \quad (5.20)$$

一般速度の関係は

$$\dot{x}_i = \sum_k \frac{\partial f_i}{\partial q_k} \dot{q}_k \quad (5.21)$$

などとなるので、変換されたラグランジェアンは

$$L = \frac{1}{2} \sum_{kl} a_{kl}(q_1 \sim q_f) \dot{q}_k \dot{q}_l - U(q_1 \sim q_f) \quad (5.22)$$

となる

次に、ポテンシャル  $U(q_1 \cdots q_f)$  を平衡位置の周りでテイラー展開する。

$$U(q_1 \sim q_f) \cong U(q_{10} \sim q_{f0}) + \sum_i \left( \frac{\partial U}{\partial q_i} \right)_{q_i=q_{i0}} (q_i - q_{i0}) \quad (5.23)$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{ij} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} \right)_{\substack{q_i=q_{i0} \\ q_j=q_{j0}}} (q_i - q_{i0})(q_j - q_{j0}) + \cdots$$

$$\simeq \frac{1}{2} \sum_{ij} k_{ij} (q_i - q_{i0})(q_j - q_{j0}) \quad (5.24)$$

ここで  $x_i \equiv q_i - q_{i0}$  とおき、

$$a_{kl}(q_1 \sim q_f) \simeq a_{kl}(q_{10} \sim q_{f0}) \equiv m_{kl} \quad (5.25)$$

と定数と近似すると、最終的にラグランジェアンが

$$L = \frac{1}{2} \sum_{ij} m_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j - \frac{1}{2} \sum_{ij} k_{ij} x_i x_j \quad (5.26)$$

となる。ここで  $m_{ij} = m_{ji}$ 、および  $k_{ij} = k_{ji}$  であることに注意しよう。

## 5.2.2 運動方程式と固有（規準）振動

ラグランジェアンとラグランジェの運動方程式

$$L = \frac{1}{2} \sum_{ij} m_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j - \frac{1}{2} \sum_{ij} k_{ij} x_i x_j \quad (5.27)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial x_i} \right) = 0 \quad (5.28)$$

から運動方程式として、次の連立方程式が得られる。

$$\sum_j m_{ij} \ddot{x}_j + \sum_j k_{ij} x_j = 0 \quad (i = 1, f) \quad (5.29)$$

$f$  は自由度を表す。ここで、 $x_j = A_j \exp(i\omega t)$  と置く。 $A_j$  は未定の定数である。

$$\sum_{j=1}^f (-m_{ij}\omega^2 + k_{ij})A_j = 0 \quad (5.30)$$

が得られる。これは  $f$  個の連立方程式であるが、未知数は  $A_1$  から  $A_f$  の  $f$  個と振動数  $\omega$  の合わせて  $f+1$  個ある。このような連立方程式の解法は線形代数でよく知られており、次のようになる。

まずこの式は  $A_1 = A_2 = \dots = A_f = 0$  の解をもつが、これは意味が無い。これ以外の解を持つ条件は次の式で与えられる。

$$\det(-m_{ij}\omega^2 + k_{ij}) = 0 \quad (5.31)$$

これは、 $\omega^2$  に関して  $f$  次方程式であり、一般に  $f$  個の解を持つ。これらの  $\omega_\ell (> 0, \ell = 1, f)$  を固有（規準）振動数という。

各解に対して、 $A_1$  から  $A_f$  の比が求まる。それらを  $A_1^{(\ell)}, A_2^{(\ell)} \dots A_f^{(\ell)}$  としよう。運動方程式の一般解は次のように与えられる。

まず、 $x_j = A_j e^{i\omega t}$  と置いたことから、各  $\omega_\ell$  に対して、

$$x_j = A_j^{(\ell)} \{c_\ell e^{i\omega_\ell t} + c'_\ell e^{-i\omega_\ell t}\} \quad (5.32)$$

$$\begin{aligned} &= A_j^{(\ell)} a_\ell \cos(\omega_\ell t + \delta_\ell) \\ &= A_j^{(\ell)} Q_\ell(t) \end{aligned} \quad (5.33)$$

となる。これは  $\ell = 1 \dots f$  のすべてに対して成り立つ。すなわちどの  $\ell$  に対する  $A_j^{(\ell)} Q_\ell(t)$  ももとの運動方程式をみたす。したがって、一般解は、

$$x_j = \sum_\ell A_j^{(\ell)} Q_\ell(t) \quad (5.34)$$

となる。ここで、 $Q_\ell(t) = a_\ell \cos(\omega_\ell t + \delta_\ell)$  を固有（規準）振動という。

- $\omega_\ell$  はすべて実数である。これは次の式中の行列が対称行列であることから証明できる。

$$\begin{bmatrix} -m_{11}\omega^2 + k_{11} & \cdots & -m_{1f}\omega^2 + k_{1f} \\ \vdots & & \vdots \\ -m_{f1}\omega^2 + k_{f1} & \cdots & -m_{ff}\omega^2 + k_{ff} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_f \end{bmatrix} = 0 \quad (5.35)$$

### 5.2.3 $A_j^{(\ell)}$ の直交関係と規格化

$A_j^{(\ell)}$  を次のように考える。

$\omega_\ell$  に対するベクトル:  $\mathbf{A}^{(\ell)} = (A_1^{(\ell)}, A_2^{(\ell)}, \dots, A_f^{(\ell)})$

$\omega_m$  に対するベクトル:  $\mathbf{A}^{(m)} = (A_1^{(m)}, A_2^{(m)}, \dots, A_f^{(m)})$

するとベクトルに対する直交関係が  $\omega_\ell \neq \omega_m$  に対して

$$\sum_{ij} m_{ij} A_j^{(\ell)} A_i^{(m)} = 0 \quad (5.36)$$

となる。もし、 $m_{ij} = \delta_{ij} \cdot m$  であれば、通常の直交関係

$$\sum_i A_i^{(\ell)} A_i^{(m)} = \mathbf{A}^{(\ell)} \cdot \mathbf{A}^{(m)} = 0 \quad (5.37)$$

が得られる。

- 証明

まず、次の式が成り立つ。

$$\sum_j (-\omega_\ell^2 m_{ij} + k_{ij}) A_j^{(\ell)} = 0 \quad (5.38)$$

$$\sum_j (-\omega_m^2 m_{ij} + k_{ij}) A_j^{(m)} = 0 \quad (5.39)$$

第2式で  $i$  と  $j$  を入れ替え、 $m_{ij} = m_{ji}$  と  $k_{ij} = k_{ji}$  に注意すると、

$$\sum_i (-\omega_m^2 m_{ij} + k_{ij}) A_i^{(m)} = 0 \quad (5.40)$$

となる。ここで、次の恒等的関係式の左辺を変形していく。

$$\sum_i (5.38) \times A_i^{(m)} - \sum_j (5.39) \times A_j^{(\ell)} = 0 \quad (5.41)$$

$$\sum_{ij} \{ (-\omega_\ell^2 m_{ij} + k_{ij}) - (-\omega_m^2 m_{ij} + k_{ij}) \} A_j^{(\ell)} A_i^{(m)} = 0 \quad (5.42)$$

$$(\omega_m^2 - \omega_\ell^2) \sum_{ij} m_{ij} A_j^{(\ell)} A_i^{(m)} = 0 \quad (5.43)$$

したがって、 $\omega_m \neq \omega_\ell$  の時には、

$$\sum_{ij} m_{ij} A_j^{(\ell)} A_i^{(m)} = 0 \quad (5.44)$$

となる。

$A_j^{(\ell)}$  などの絶対値を決めるために次の条件、

$$\sum_{ij} m_{ij} A_j^{(\ell)} A_i^{(\ell)} = 1 \quad (5.45)$$

を課する。これを規格化条件という。

直交関係と規格化条件を合わせて、一般に

$$\sum_{ij} m_{ij} A_j^{(\ell)} A_i^{(m)} = \delta_{\ell m} \quad (5.46)$$

と記す。

## 5.3 例題

### 5.3.1 バネで連結された2つの質点

図5.3のように二個の質点（質量はともに  $m$ ）が三個の同じバネ（バネ定数  $k$ ）で一直線につながれ、両端A、Bでバネは固定されている。この系の微小振動（A - B方向の振動）を調べよ。すなわち、基準振動数を求め、基準振動の様子を示せ。

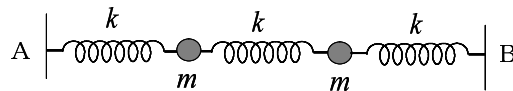


図 5.3: バネで連結された2つの質点の振動

解答

一般座標として、おもりの変位  $x_1, x_2$  をとる。ラグランジェアンは、

$$L = T - U \quad (5.47)$$

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) \quad (5.48)$$

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} k \{ x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + x_2^2 \} \\ &= \frac{1}{2} k (2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2) \end{aligned} \quad (5.49)$$

となる。ラグランジェ運動方程式

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial x_1} \right) = 0 \quad (5.50)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial x_2} \right) = 0 \quad (5.51)$$

より

$$m\ddot{x}_1 + k(2x_1 - x_2) = 0 \quad (5.52)$$

$$m\ddot{x}_2 + k(2x_2 - x_1) = 0 \quad (5.53)$$

が得られる。

ここで、 $x_1 = A_1 e^{i\omega t}$ ,  $x_2 = A_2 e^{i\omega t}$  と置くと、

$$\begin{cases} -m\omega^2 A_1 + k(2A_1 - A_2) = 0 \\ -m\omega^2 A_2 + k(2A_2 - A_1) = 0 \end{cases} \quad (5.54)$$

の連立方程式がえられる。これは行列を用いて表すと、

$$\begin{bmatrix} -m\omega^2 + 2k & -k \\ -k & -m\omega^2 + 2k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (5.55)$$

のようになる。 $A_1 = A_2 = 0$  以外の解をもつためには、

$$\begin{vmatrix} -m\omega^2 + 2k & -k \\ -k & -m\omega^2 + 2k \end{vmatrix} = 0 \quad (5.56)$$

が成り立たねばならない。したがって、これから

$$(-m\omega^2 + 2k)^2 - k^2 = 0 \quad (5.57)$$

となり、振動数が

$$\omega^2 = \frac{k}{m}, \frac{3k}{m} \quad (5.58)$$

として2つもとまる。これらを固有振動数と呼ぶ。 $\omega^2$  は行列の固有値、 $(A_1, A_2)$  は固有ベクトルに対応する。

$\omega^2 = \frac{k}{m} \equiv \omega_1^2$  に対応する固有ベクトルを、 $A^{(1)} \equiv (A_1^{(1)}, A_2^{(1)})$ 、 $\omega^2 = \frac{3k}{m} \equiv \omega_2^2$  に対応する固有ベクトルを、 $A^{(2)} \equiv (A_1^{(2)}, A_2^{(2)})$  としよう。固有値をもとの連立方程式に代入すると、

$$(-m\omega_1^2 + 2k) A_1^{(1)} - k A_2^{(1)} = 0 \quad (5.59)$$

より、 $A_1^{(1)} - A_2^{(1)} = 0$  が、

$$(-m\omega_2^2 + 2k) A_1^{(2)} - k A_2^{(2)} = 0 \quad (5.60)$$



より、 $A_1^{(2)} - A_2^{(2)} = 0$  が得られる。したがって、これらを規格化すると、

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (5.61)$$

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (5.62)$$

が得られる。

変位  $x_1(t), x_2(t)$  の解としては、

$$x_1(t) = A_1^{(1)} e^{\pm i\omega_1 t}, A_1^{(2)} e^{\pm i\omega_2 t} \quad (5.63)$$

$$x_2(t) = A_2^{(1)} e^{\pm i\omega_1 t}, A_2^{(2)} e^{\pm i\omega_2 t} \quad (5.64)$$

があるので、一般解は次のように書ける。

$$x_1(t) = A_1^{(1)} \{be^{i\omega_1 t} + b'e^{-i\omega_1 t}\} + A_1^{(2)} \{ce^{i\omega_2 t} + c'e^{-i\omega_2 t}\} \quad (5.65)$$

$$= A_1^{(1)} a_1 \cos(\omega_1 t + \delta_1) + A_1^{(2)} a_2 \cos(\omega_2 t + \delta_2)$$

$$\equiv A_1^{(1)} Q_{(1)}(t) + A_1^{(2)} Q_{(2)}(t)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \{Q_{(1)}(t) + Q_{(2)}(t)\} \quad (5.66)$$

$$x_2(t) = A_2^{(1)} \{be^{i\omega_1 t} + b'e^{-i\omega_1 t}\} + A_2^{(2)} \{ce^{i\omega_2 t} + c'e^{-i\omega_2 t}\} \quad (5.67)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \{Q_{(1)}(t) - Q_{(2)}(t)\} \quad (5.68)$$

ここで、 $Q_\ell(t) = a_\ell \cos(\omega_\ell t + \delta_\ell)$  を固有（規準）振動と呼ぶ。

- これら、 $x_1(t), x_2(t)$  は、 $Q_\ell(t)$  の振幅  $a_\ell$  のとり方により、2つの振動の重ねあわせとなる。今、 $a_2 = 0$ , すなわち  $Q_{(2)}(t) = 0$  とすると、 $x_1 = x_2 = Q_1/\sqrt{2}$  となり、2つのおもりの変位の方向は同じとなる。すなわち同じ位相で振動する。一方、 $a_1 = 0$  とすると、 $x_1 = -x_2 = Q_2/\sqrt{2}$  となり2つのおもりは逆位相で振動する。

### 5.3.2 2重振り子

下図右のような二重振り子が微小振動している。この時の基準振動数を求め、基準振動の様子を示せ。二つの糸の長さも二つの重りの重さも同じとする。

解答

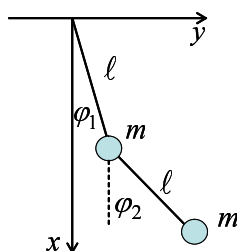


図 5.4: 2重振り子

各質点の座標を次のように変換する。

$$\begin{aligned}x_1 &= l \cos \varphi_1 \\y_1 &= l \sin \varphi_1 \\x_2 &= x_1 + l \cos \varphi_2 \\y_2 &= y_1 + l \sin \varphi_2\end{aligned}$$

運動エネルギーは、

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}m(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)$$

ポテンシャルエネルギーは

$$U = -mgx_1 - mgx_2$$

であり、これらを系の長さと同角で表すと、

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2}m\ell^2 [2\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 + 2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2] \\U &= -2mg\ell \cos \varphi_1 - mg\ell \cos \varphi_2\end{aligned}$$

となる。微小振動であるので、

$$\begin{aligned}\cos \varphi_{1(2)} &\sim 1 - \frac{1}{2}\varphi_{1(2)}^2 \\ \cos(\varphi_1 - \varphi_2) &\sim 1\end{aligned}$$

とし、ラグランジェアンの定数項を無視すると、

$$L = \frac{1}{2}m\ell^2 (2\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 + 2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2) - \frac{1}{2}mg\ell (2\varphi_1^2 + \varphi_2^2)$$

となる。運動方程式も求め、

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= A_1 e^{i\omega t} \\ \varphi_2 &= A_2 e^{i\omega t}\end{aligned}$$

と置くと、

$$\begin{pmatrix} 2m(g - l\omega^2) & -ml\omega^2 \\ -l\omega^2 & g - l\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0.$$

行列式=0より、規準振動数が2つ

$$\omega^2 = (2 \mp \sqrt{2}) \frac{g}{l}$$

求まる。

- $\omega^2 = \omega_1^2 = (2 - \sqrt{2}) g/l$  の時、 $A_2^{(1)} = \sqrt{2}A_1^{(1)}$  であり、二つの振り子は同位相で振れる。
- $\omega^2 = \omega_2^2 = (2 + \sqrt{2}) g/l$  の時、 $A_2^{(2)} = \sqrt{2}A_1^{(2)}$  であり、二つの振り子は逆位相で振れる。

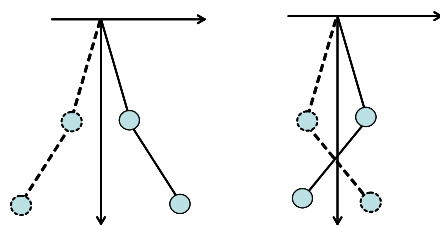


図 5.5: 2重振り子の基準振動の様子

## 5.4 練習問題

問 1 次のポテンシャルのなかでの微小振動のようす（単振動の振動数）を調べよ。

$$(1) \quad U(q) = \frac{A}{B}e^{-Bq} + Aq - \frac{A}{B}$$

$$(2) \quad U(q) = -\frac{A^2}{q} + \frac{B^2}{q^2}$$

問 2 一個のおもり（質量  $m$ ）を二つの同じバネ（自然長  $l_0$ 、バネ定数  $k$ ）で下図左のように保つ。この時、バネは長さ  $s$  だけ伸びたとする。このおもりを下に押しはなした時の微小振動の振動数を求めよ。重力は働いていないとする。

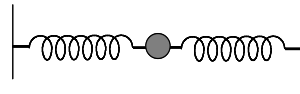


図 5.6: バネで繋がれた質点の鉛直方向の振動

問 3 連立運動方程式 (5.29) 式を確かめよ。

問 4  $Q_\ell(t)$  はその定義より  $\ddot{Q}_\ell + \omega_\ell^2 Q_\ell = 0$  を満たすことを確かめよ。  
また、例題において、

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_1 + Q_2)$$
$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_1 - Q_2)$$

と変換すると、ラグランジェアンおよびラグランジェ運動方程式から導かれる運動方程式はどのようになるか。

## 第6章 剛体の運動

この章では、剛体の運動をラグランジェアン形式で取り扱う。物体が大ききのある系であるため、物体の回転を取り入れねばならない。その結果、剛体の運動を記述するには、剛体の並進運動と回転運動とを考慮せねばならない。回転運動は、慣性モーメントを導入することで取り入れられる。剛体の運動を理解するうえで注意しなければならないのは次の点である。剛体の回転運動は、回転を記述する回転ベクトルで決まるが、これは保存量ではない。保存するのは角運動量であり、角運動量ベクトルは、一般には回転ベクトルとは一致しない。この結果としてコマのような複雑な運動が生じることになる。

### 6.1 剛体の定義と剛体の運動の特徴

剛体とはその字の通り硬い物質のことであるが、物理的には「相互間の距離が不変であるような質点の集合」と定義する。剛体の内部運動は考えない。剛体は質量が連続的に分布している連続体であるが、以下の取り扱いでは、剛体を多数の質点の集まりと考えることにする。このようにすると、数学的取り扱いが見易くなる。全質量  $m_0$  は

$$m_0 = \sum_i m_i \quad (6.1)$$

と表されることになる。

剛体に内部運動がないということは、これらの質点の相対的位置は不変であることを意味する。したがって剛体の運動の自由度は、3次元空間で、並進運動を表す3つの自由度と、回転運動を表す3つの自由度の合わせて6つになる。並進運動は重心の運動を考えればよい。また回転運動は重心まわりの回転を考えればよい。したがって運動方程式の数は基本的には6つとなる。これらの運動方程式をラグランジェアンから導く必要がある。

ラグランジェアンは運動エネルギーと位置エネルギーの和として与えられた。後者は各質点の位置エネルギーの和とすればよい。前者は並進運動のエネルギーと回転運動のエネルギーの和となる。並進運動のエネルギーは質量に速度の2乗をかけたものであった。回転運動のエネルギーはどのように表されるであろうか。質量に相当するものとして慣性モーメント、

速度に相当するものとして角速度が現れることが以下に述べることからわかるであろう。また、回転運動をしているわけであるから、角運動量も問題となる。慣性モーメントは角運動量と角速度を関係づけるものとなっていることもわかるであろう。慣性モーメントは剛体の形と質量とが回転運動に関係することを示している。

なお、(6.1) 式を連続体に適用すると、密度  $\rho(\mathbf{r})$  を用いて、

$$m_0 = \int \int \int \rho(\mathbf{r}) dx dy dz \quad (6.2)$$

となる。

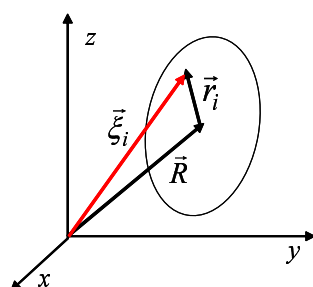


図 6.1: 剛体を特徴づける位置ベクトル

### 6.1.1 速度

固定された座標系での剛体の運動を考えよう。座標原点から、剛体内のある点 P の位置ベクトルを  $\xi$ 、重心までの位置ベクトルを  $\mathbf{R}$ 、重心と点 P との間の位置ベクトルを  $\mathbf{r}$  としよう。そうすると、

$$\xi = \mathbf{R} + \mathbf{r} \quad (6.3)$$

の関係がある。ここで、剛体が重心まわりで、角速度  $\Omega$  で回転しているとしよう。(  $\Omega$  や  $\xi$  はベクトルであることに注意せよ。 ) このように剛体が運動している場合、剛体内の点 P の位置の変化は、重心の移動 + 重心まわりの回転によって決まることになる。無限小の移動を考えると、

$$\delta \xi = \delta \mathbf{R} + (\delta \varphi \times \mathbf{r}) \quad (6.4a)$$

となる。ここで、 $\delta \varphi$  は回転角度のベクトル表示である。これを一般的に理解するためには、もう少し準備が必要である。ここでは、 $Z$  軸まわりの回転を考えてみよう。回転ベクトル (角速度ベクトル) は  $Z$  軸方向のベ

クトルである。回転角度を表すベクトルも  $Z$  軸方向を向いている。その成分は  $X - Y$  平面上の角度である。(9.4) 式を時間で微分すると、

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} + \left( \frac{d\varphi}{dt} \times \mathbf{r} \right) \quad (6.5a)$$

となる。ここで点  $P$  の速度と重心の速度をそれぞれ、

$$\mathbf{v} = \frac{d\xi}{dt} \quad (6.6)$$

$$\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} \quad (6.7)$$

と定義すると、角速度は

$$\Omega = \frac{d\varphi}{dt} \quad (6.8)$$

であるから、点  $P$  の速度ベクトルは

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + (\Omega \times \mathbf{r}) \quad (6.9)$$

のように重心の運動 + 重心まわりの回転として表される。

### 6.1.2 角運動量

角運動量は

$$\mathbf{M} = \sum_i m_i (\xi_i \times \mathbf{v}_i) \quad (6.10)$$

で与えられる。ここに (4.9) 式から得られる、

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{V} + (\Omega \times \mathbf{r}_i) \quad (6.11)$$

を代入すると、

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \sum_i m_i \{ (\mathbf{R} + \mathbf{r}_i) \times (\mathbf{V} + \Omega \times \mathbf{r}_i) \} \\ &= \sum_i m_i \{ \mathbf{r}_i \times (\Omega \times \mathbf{r}_i) \} + \sum_i m_i \mathbf{R} \times \mathbf{V} \\ &\quad + \sum_i m_i \mathbf{R} \times (\Omega \times \mathbf{r}_i) + \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{V} \end{aligned} \quad (6.12)$$

となる。

ここで、

$$\sum_i m_i \mathbf{r}_i \equiv 0 \quad (6.13)$$

となることに注意しよう。これは、次のことから理解される。位置ベクトル  $\mathbf{r}_i$  は剛体の重心から測った相対ベクトルである。つまり重心がその相対座標系の原点である。また  $\sum_i m_i \mathbf{r}_i / m_0$  は重心の位置である。したがって上式が成立することになる。

このことより、(6.12) 式の第4項はゼロとなる。また第3項も次のようにしてゼロとなる。

$$\mathbf{R} \times \left( \boldsymbol{\Omega} \times \sum_i m_i \mathbf{r}_i \right) = 0 \quad (6.14)$$

全質量の定義、 $m_0 = \sum_i m_i$  を用いると、

$$\mathbf{M} = m_0 \mathbf{R} \times \mathbf{V} + \sum_i m_i \{ \mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_i) \} \quad (6.15)$$

が得られる。第1項は重心が固定座標系で回転運動することによる角運動量である。第2項は、剛体が重心まわりに回転運動することによる角運動量である。

### 6.1.3 慣性テンソルの導入

角運動量の成分をあらわに求めるために、(6.15) 式を次のように少し変形する。

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= m_0 \mathbf{R} \times \mathbf{V} + \sum_i m_i \{ \boldsymbol{\Omega} (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i) - \mathbf{r}_i (\mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\Omega}) \} \\ &= \mathbf{M}_0 + \sum_i m_i \{ (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) \boldsymbol{\Omega} - (x_i \Omega_x + y_i \Omega_y + z_i \Omega_z) \mathbf{r}_i \} \end{aligned} \quad (6.16)$$

ここで、 $\mathbf{M}_0$  は重心運動の角運動量である。各成分をあらわに書き下すと、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} M_{0x} \\ M_{0y} \\ M_{0z} \end{pmatrix} \\ &+ \sum_i m_i \begin{pmatrix} y_i^2 + z_i^2 & -y_i x_i & -z_i x_i \\ -x_i y_i & x_i^2 + z_i^2 & -z_i y_i \\ -x_i z_i & -y_i z_i & x_i^2 + y_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6.17)$$

となる。行列の部分が慣性テンソルと呼ばれるもので、

$$\begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} = \sum_i m_i \begin{pmatrix} y_i^2 + z_i^2 & -y_i x_i & -z_i x_i \\ -x_i y_i & x_i^2 + z_i^2 & -z_i y_i \\ -x_i z_i & -y_i z_i & x_i^2 + y_i^2 \end{pmatrix} \quad (6.18)$$



で定義される。これを用いると、(6-17)式は

$$M_\alpha = M_{0\alpha} + \sum_{\beta} I_{\alpha\beta} \Omega_\beta \quad (6.19)$$

または

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_0 + \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\Omega} \quad (6.20)$$

とコンパクトに表現される。なお、 $\alpha, \beta$  は  $x, y, z$  を表す。なお、(6-18)式は

$$I_{\alpha\gamma} \equiv \sum_i m_i \left\{ \sum_{\beta} r_{i\beta}^2 \delta_{\alpha\gamma} - r_{i\alpha} r_{i\gamma} \right\} \quad (6.21)$$

とも書き表される。ここで  $\mathbf{I}$  を慣性テンソルと呼ぶ。

- ベクトル演算

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) \mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{C}$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$$

- 注意1 角運動量と回転ベクトル  $\boldsymbol{\Omega}$  の方向は一致しない。
- 注意2 角運動量は保存量であるが、回転ベクトルは時間変化する。
- 注意3 慣性テンソル  $\mathbf{I}$  は剛体固有の量である。

#### 6.1.4 運動エネルギー

運動エネルギーは

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \quad (6.22)$$

で定義される。これに速度の定義式、(6.11)式を代入し、変形すると、

$$\begin{aligned} T &= \sum_i \frac{1}{2} m_i \{ \mathbf{V} + (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_i) \}^2 \\ &= \frac{1}{2} m_0 V^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_i)^2 \end{aligned} \quad (6.23)$$

となる。となる。第1項は重心の運動エネルギー、第2項は重心まわりの回転エネルギーである。

回転エネルギーは慣性テンソルを用いて表すことができる。それには第2項を次のように変形する。

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})^2 &= (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \\ &= \sum_{\alpha\gamma} \Omega_\alpha \Omega_\gamma \left\{ \sum_{\beta} r_\beta^2 \delta_{\alpha\gamma} - r_\alpha r_\gamma \right\} \end{aligned} \quad (6.24)$$

したがって

$$T = \frac{1}{2} m_0 V^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i \sum_{\alpha\gamma} \Omega_\alpha \Omega_\gamma \left\{ \sum_{\beta} r_{i\beta}^2 \delta_{\alpha\gamma} - r_{i\alpha} r_{i\gamma} \right\} \quad (6.25)$$

が得られる。慣性テンソルの定義(4.6)式を用いると、

$$T = \frac{1}{2} m_0 V^2 + \frac{1}{2} \sum_{\alpha\gamma} I_{\alpha\gamma} \Omega_\alpha \Omega_\gamma \quad (6.26)$$

と表される。

## 6.2 慣性テンソルと慣性モーメント

慣性テンソル

$$I_{\alpha\gamma} \equiv \sum_i m_i \left\{ \sum_{\beta} r_{i\beta}^2 \delta_{\alpha\gamma} - r_{i\alpha} r_{i\gamma} \right\} \quad (6.27)$$

を連続体に一般化すると

$$I_{\alpha\gamma} = \int \rho(\mathbf{r}) \left\{ \sum_{\beta} r_\beta^2 \delta_{\alpha\gamma} - r_\alpha r_\gamma \right\} d\mathbf{r} \quad (6.28)$$

となる。具体的には、

$$I_{xx} = \int \rho(r) (y^2 + z^2) dx dy dz \quad (6.29)$$

$$I_{xy} = - \int \rho(r) xy dx dy dz \quad (6.30)$$

などである。

慣性テンソルは対称行列であり、

$$I_{\alpha\gamma} = I_{\gamma\alpha} \quad (6.31)$$

の関係が成立する。慣性テンソル行列のなかで、対角要素、 $I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}$  を慣性モーメント、非対角要素を慣性乗積と呼んでいる。

対称性の良い場合には

$$I = \begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix} \quad (6.32)$$

$$I_x = \int \rho(r) (y^2 + z^2) dr \quad (6.33)$$

$$I_y = \int \rho(r) (x^2 + z^2) dr \quad (6.34)$$

$$I_z = \int \rho(r) (x^2 + y^2) dr \quad (6.35)$$

であり、運動エネルギーは

$$T = \frac{1}{2} (I_x \Omega_x^2 + I_y \Omega_y^2 + I_z \Omega_z^2) \quad (6.36)$$

となる。

### 6.2.1 重心と回転中心とが一致しない場合の慣性モーメント

剛体の重心と回転の中心とが一致しない場合の慣性モーメントはどのようになるだろうか。この場合でも、慣性モーメントの定義にしたがってそれを計算すれば良いわけであるが、実はその場合の慣性モーメントと、重心が回転中心になる場合の慣性モーメントとの間には簡単な関係があり、後者を一度計算しておけば、前者は簡単に求まることになる。このことを以下で見ていこう。

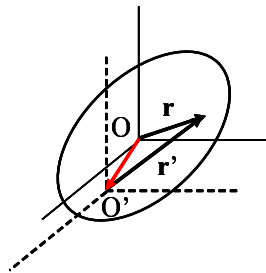


図 6.2: 異なる座標系の中の位置ベクトルの関係

重心を  $O$ 、回転中心を  $O'$  とし、重心からの位置ベクトルを  $r$ 、そのまわりの慣性テンソルを  $I$  としよう。また回転中心からの位置ベクトルを  $r'$ 、

そのまわりの慣性テンソルを  $I'$  としよう。また、 $O$  と  $O'$  とはベクトル  $\mathbf{a}$  だけ離れているとする。すなわち、

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{a} \quad (6.37)$$

慣性テンソルの定義にしたがって、 $I'$  を書き下すと、

$$I'_{\alpha\gamma} = \sum_i m_i \left\{ \sum_{\beta} r'_{i\beta}{}^2 \delta_{\alpha\gamma} - r'_{i\alpha} r'_{i\gamma} \right\} \quad (6.38)$$

となる。ここで、 $\mathbf{r}'$  に  $\mathbf{r} - \mathbf{a}$  を代入すると、

$$\begin{aligned} I'_{\alpha\gamma} &= \sum_i m_i \left\{ \sum_{\beta} (r_{i\beta} - a_{\beta})^2 \delta_{\alpha\gamma} - (r_{i\alpha} - a_{\alpha})(r_{i\gamma} - a_{\gamma}) \right\} \\ &= \sum_i m_i \left\{ \sum_{\beta} r_{i\beta}^2 \delta_{\alpha\gamma} - r_{i\alpha} r_{i\gamma} \right\} \\ &\quad + \sum_i m_i \left\{ \sum_{\beta} (-2r_{i\beta} a_{\beta} + a_{\beta}^2) \delta_{\alpha\gamma} + r_{i\alpha} a_{\gamma} + r_{i\gamma} a_{\alpha} - a_{\alpha} a_{\gamma} \right\} \end{aligned} \quad (6.39)$$

となる。

上式は  $\mathbf{r}_i$  が重心から測った位置ベクトルであることに注意すると簡単になることがわかる。すなわち、

$$\sum_i m_i \mathbf{r}_i = 0 \quad (6.40)$$

であるから、 $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$  として、( $r_{i\alpha} = x_i, y_i$  または  $z_i$ )

$$\sum_i m_i x_i = \sum_i m_i y_i = \sum_i m_i z_i = 0 \quad (6.41)$$

が成り立つ。これらに、 $a_{\gamma} (a_x, a_y$  または  $a_z)$  を掛けても、ゼロであるから、

$$\sum_i m_i r_{i\alpha} a_{\gamma} = 0 \quad (6.42)$$

が成り立つ。また、 $\gamma = \alpha$  として  $\alpha$  について和を取ってもゼロであるから、

$$\sum_i \sum_{\alpha} m_i r_{i\alpha} a_{\alpha} = \sum_i m_i (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{a}) = 0 \quad (6.43)$$

も成立する。したがって、

$$I'_{\alpha\gamma} = I_{\alpha\gamma} + \sum_i m_i \left\{ \sum_{\beta} a_{\beta}^2 \delta_{\alpha\gamma} - a_{\alpha} a_{\gamma} \right\} \quad (6.44)$$

となる。

## 6.2.2 角運動量と回転ベクトルとの関係

重心と回転中心とが異なる場合、角運動量と回転ベクトルとの関係はどのようなになるだろうか。

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_0 + \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\Omega}$$

である。ここで回転中心は固定されているとしよう。こうすると、 $\mathbf{M}_0$  は、重心が回転中心まわりに回転することによる角運動量である。したがって、

$$\begin{aligned} M_0 &= m_0 \mathbf{a} \times \mathbf{V} \\ &= m_0 \mathbf{a} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{a}) \end{aligned} \quad (6.45)$$

となる。上式を成分に分解して書きなおすと、

$$m_0 \mathbf{a} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{a}) = m_0 \begin{pmatrix} a_y^2 + a_z^2 & -a_y a_x & -a_z a_x \\ -a_x a_y & a_z^2 + a_x^2 & -a_z a_y \\ -a_x a_z & -a_y a_z & a_x^2 + a_y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{pmatrix} \quad (6.46)$$

となる。 $\mathbf{a} = (0 \ 0 \ a_z)$  とすると、

$$m_0 \mathbf{a} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{a}) = m_0 \begin{pmatrix} a_z^2 & 0 & 0 \\ 0 & a_z^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{pmatrix} \quad (6.47)$$

となるので、

$$M_x = I_x \Omega_x + m_0 a_z^2 \Omega_x = (I_x + m_0 a_z^2) \Omega_x \quad (6.48)$$

$$M_y = (I_y + m_0 a_z^2) \Omega_y \quad (6.49)$$

$$M_z = I_z \Omega_z \quad (6.50)$$

が得られる。

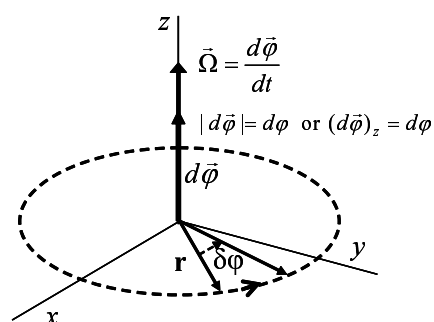
## 6.2.3 運動エネルギーの具体的な表示

運動エネルギーは

$$T = \frac{1}{2} m_0 V^2 + \frac{1}{2} \sum_{\alpha\gamma} I_{\alpha\gamma} \Omega_\alpha \Omega_\gamma \quad (6.51)$$

と表された。これを具体的問題に当てはめてみよう。

まず、回転ベクトルの成分を定義せねばならない。図のように  $z$  軸まわりの回転を考えよう。回転ベクトルは  $z$  軸方向となり、その大きさは  $x-y$

図 6.3:  $z$  軸まわりの回転

平面上の角度  $\varphi$  の時間変化で与えられる。以下では、このように考えやすい軸まわりの回転を取り扱うことにする。

簡単な例として、質量  $m$ 、厚さ  $b$ 、半径  $R$  の円盤が平面上をまさつなく回転、移動している場合を考えよう。平面に垂直方向を  $z$  軸とし、重心の速度を  $V$ 、回転角を  $\varphi$  とすると、運動エネルギーは

$$T = \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}I_z\Omega_z^2 \quad (6.52)$$

$$V^2 = \dot{X}^2 + \dot{Y}^2 \quad (6.53)$$

$$\Omega_z = \dot{\varphi} \quad (6.54)$$

である。ここで  $(X, Y)$  は重心の位置座標である。したがって、

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) + \frac{1}{2}I_z\dot{\varphi}^2 \quad (6.55)$$

となる。

### 6.3 練習問題

問 1 簡単な場合に対して、(6.4a) 式、(6.5a) 式を図示することにより、(6.9) 式を理解せよ。

問 2 (6.9) 式を図示せよ。

問 3 式 (6.15) を確かめよ。

問 4 (6.23) 式を確かめよ。

問 5 (6.24) 式を確かめよ。

問 6 次の一様な物体の重心まわりの主慣性モーメントを求めよ。質量はすべて  $m$  とする。

- 1) 長さ  $\ell$  の細長い棒
- 2) 半径  $R$  の球
- 3) 半径  $R$ 、高さ  $h$  の円柱

問 7 対称性の良い楕円体に対して、図のように回転中心が重心の位置と異なる場合の慣性モーメントを求めよ。重心が回転中心となっていたときの慣性モーメントを  $I_{zz}$  とする。

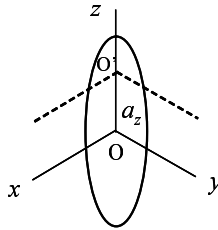


図 6.4: 楕円体の慣性モーメント

問 8 質量  $m$ 、半径  $a$ 、長さ  $\ell$  の円柱が平面を  $x$  方向に転がるときの運動エネルギーを表せ。摩擦は無視する。平面に垂直方向を  $z$  軸とせよ。

## 第7章 剛体のラグランジェアンと運動方程式

本章では、剛体の運動を具体的に取り扱おう。

### 7.1 剛体のラグランジェアン

剛体のポテンシャルエネルギーは剛体内の位置  $\xi_i$  でのポテンシャルエネルギーの和である。これを  $U(\{\xi_i\})$  と書くことにしよう。座標軸は図 4.1 のようにとってある。運動エネルギーは、重心の運動エネルギーと回転エネルギーの和である。したがってラグランジェアンは

$$L = \frac{1}{2}m_0\mathbf{V}^2 + \frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta} I_{\alpha\beta}\Omega_\alpha\Omega_\beta - U(\{\xi_i\}) \quad (7.1)$$

と与えられる。

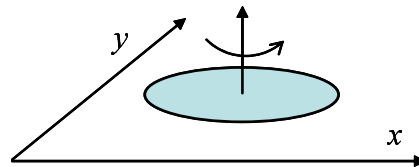


図 7.1: 水平面上の円盤の回転運動

簡単な例として、質量  $m$ , 厚さ  $b$ , 半径  $R$  の円盤が平面上をまさつなく回転、移動している場合を考えよう (図 7.1)。すなわち、平面に垂直方向を  $z$  軸とし、重心の速度を  $V$ , 回転角を  $\varphi$  とすると、運動エネルギーは

$$T = \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}I_z\Omega_z^2 \quad (7.2)$$

$$V^2 = \dot{X}^2 + \dot{Y}^2 \quad (7.3)$$

$$\Omega_z = \dot{\varphi} \quad (7.4)$$

と与えられる。ここで  $(X, Y)$  は重心の位置座標である。したがって、

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) + \frac{1}{2}I_z\dot{\varphi}^2 \quad (7.5)$$



となる。水平運動であるので、ポテンシャルエネルギーは考えなくてよい。したがってラグランジェアンは、

$$L = T - U = \frac{1}{2}m(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) + \frac{1}{2}I_z\dot{\varphi}^2 \quad (7.6)$$

となる。

## 7.2 運動方程式 - 簡単な例

前節の例において、 $\dot{X}, \dot{Y}, \dot{\varphi}$  を一般速度、 $X, Y, \varphi$  を一般座標と考えると、今までのやり方と同様に、運動方程式は

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{X}} \right) - \frac{\partial L}{\partial X} = 0 \quad (7.7)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{Y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial Y} = 0 \quad (7.8)$$

と

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \quad (7.9)$$

である。前二つは重心の運動方程式であり、後者は剛体の回転運動を表す。これらの式はすでに何度も現れてきたものである。具体的に書き下すと、それぞれ

$$m\ddot{X} = 0 \quad (7.10)$$

$$m\ddot{Y} = 0 \quad (7.11)$$

$$I_z\ddot{\varphi} = 0 \quad (7.12)$$

となる。これらの式を比べると、 $I_z$  が回転運動における質量の役割を果たしていることがわかるであろう。これらの微分方程式は簡単に積分できて、それぞれ速度一定の重心の運動と、回転速度一定の回転を与えることになる。

この例では、角速度ベクトルの向きは、 $z$  方向であるので、 $\dot{\varphi} = \Omega_z$  である。したがって、(7.9) 式は、

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \Omega_z} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \quad (7.13)$$

と書くことができる。以上を一般化すると、運動方程式は、重心運動に対しては、

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \mathbf{V}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{R}} = 0, \quad (7.14)$$

回転運動に対しては、

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \Omega_\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi_\alpha} = 0 \quad (7.15)$$

と与えられることが想像される。このことは、次講で考察しよう。

### 7.3 拘束条件のある場合の運動

前節の例は、重心運動と回転運動とが独立（無関係）であった。剛体の運動においては、重心運動と回転運動とに関係がある場合が多い。例えば、図 7.2 のように円柱が水平面上を滑らずに転がる場合である。

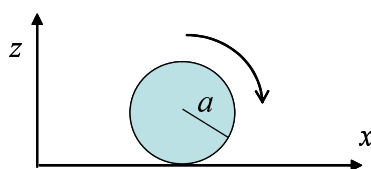


図 7.2: 平面上の円柱の回転運動

このような場合には、運動に対する拘束条件が存在する。円柱が水平面上を滑らずに転がる場合を考えよう。円柱の慣性主軸は  $y$  方向とし、円盤は  $x$  方向に転がるとしよう。慣性モーメントは  $I_y$  である。重心の運動は  $x$  方向であり、水平運動であるから、ラグランジェアンは、

$$T = \frac{1}{2} m \dot{X}^2 + \frac{1}{2} I_y \Omega_y^2 \quad (7.16)$$

$$\Omega_y \equiv \dot{\theta} \quad (7.17)$$

$$L = T - U = T \quad (7.18)$$

となる。したがって運動方程式は、

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{X}} \right) - \frac{\partial L}{\partial X} = 0 \quad (7.19)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad (7.20)$$

の2つとなる。しかしながら、円盤はすべらずに転がるわけであるから、回転と重心とが関係している。すなわち、円盤の半径を  $a$  とすると、

$$\delta X = a \delta \theta \quad (7.21)$$

の関係がある。これを時間で微分すると、

$$\dot{X} = a\dot{\theta} \quad (7.22)$$

となる。これが拘束条件である。この関係式から変数を消去することができ、運動方程式は実質上1つとなる。 $\dot{\theta}$ を消去すると、ラグランジェアンは、

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}m\dot{X}^2 + \frac{1}{2}I_y \left( \frac{\dot{X}}{a} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \left( m + \frac{I_y}{a^2} \right) \dot{X}^2 \end{aligned} \quad (7.23)$$

となる。したがって運動方程式は、

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{X}} \right) - \frac{\partial L}{\partial X} = \left( m + \frac{I_y}{a^2} \right) \ddot{X} = 0 \quad (7.24)$$

となる。

- ラグランジェの未定係数法

拘束条件付きの問題を解く場合の手法として、ラグランジェの未定係数法というものがある。これを上記の問題に適用してみよう。拘束条件  $\delta X = a\delta\theta$  を

$$X - a\theta = 0 \quad (7.25)$$

と書き直し、これに未定の定数  $\lambda$  を掛けて、ラグランジェアンに加える。新しいラグランジェアンは

$$L' = \frac{1}{2}m\dot{X}^2 + \frac{1}{2}I_y\dot{\theta}^2 + \lambda(X - a\theta) \quad (7.26)$$

となる。 $X$  と  $\theta$  について運動方程式をたてると

$$m\ddot{X} - \lambda = 0 \quad (7.27)$$

$$I_y\ddot{\theta} + a\lambda = 0 \quad (7.28)$$

となる。これらから、 $\lambda$  を消去すると、

$$m\ddot{X} + \frac{I_y}{a}\ddot{\theta} = 0 \quad (7.29)$$

となる。これに、 $\ddot{X} = a\ddot{\theta}$  を代入すると、上で求めた運動方程式と同じものが得られる。

- ホロノーム系と非ホロノーム系

拘束条件には、ホロノーム系と非ホロノーム系の二つがある。前者は変数  $x$  と  $y$  との間の拘束条件が、 $f(x, y) = 0$  のような形になるものである。前例では、 $X - a\theta = 0$  であった。後者はこのように表せないもので、ここでは詳しくは述べない。例えば、都築卓司著「なっとくする解析力学」、ゴールドシュタイン「古典力学」などを参考されたい。

拘束条件は回転運動に限られるわけではない。つぎのような、斜面を摩擦なしにすべるおりの物体の運動を考えてみよう。図 7.3 のように座標をとると、運動方程式は、

$$m\ddot{x} = N \sin \varphi \quad (7.30)$$

$$m\ddot{y} = N \cos \varphi - mg \quad (7.31)$$

これに、物体が斜面にそって運動するという条件、すなわち

$$y = -x \tan \varphi \quad (7.32)$$

が付く。これらの式から運動が決まることになる。

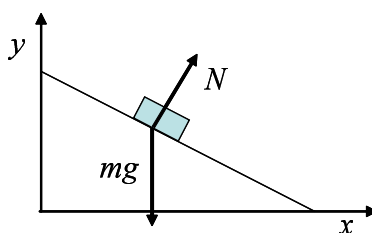


図 7.3: 斜面を滑り落ちる剛体

## 7.4 剛体の運動方程式：一般型

### 7.4.1 剛体のラグランジェアン

剛体のポテンシャルエネルギーは剛体内の位置  $\xi_i$  でのポテンシャルエネルギーの和である。これを  $U(\{\xi_i\})$  と書くことにしよう。運動エネルギーは重心の運動エネルギーと回転エネルギーの和である。したがってラグランジェアンは

$$L = \frac{1}{2} m_0 \mathbf{V}^2 + \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} I_{\alpha\beta} \Omega_\alpha \Omega_\beta - U(\{\xi_i\}) \quad (7.33)$$

と与えられる。これから重心の運動である並進運動と、回転運動の運動方程式が次のようにして求まる。

## 7.4.2 並進運動

重心の位置が  $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} + \delta\mathbf{R}$  のように微小量変化したとしよう。剛体内の各質点の相対位置は変化しないから（これが剛体の定義であった）

$$\xi_i \rightarrow \xi_i + \delta\mathbf{R} \quad (7.34)$$

が成り立つ。この時ポテンシャルエネルギー  $U(\{\xi_i\})$  の変化は  $\delta\xi_i = \delta\mathbf{R}$  であるから、

$$\delta U = \sum_i \frac{\partial U}{\partial \xi_i} \delta \xi_i = \delta R \sum_i (-f_i) = -\delta R \cdot \mathbf{F} \quad (7.35)$$

となる。ここで、力を

$$\mathbf{f}_i = -\frac{\partial U}{\partial \xi_i} \quad (7.36)$$

$$\mathbf{F} = \sum_i \mathbf{f}_i \quad (7.37)$$

と定義した。したがって、

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{R}} \quad (7.38)$$

が得られる。これは、質点と同様の関係が剛体でも成立することを示している。ただし、ここでの力は重心に働く全体の力と解釈される。

他方、

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{V}} = m_0 \mathbf{V} \equiv \mathbf{P} \quad (7.39)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{R}} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{R}} = \mathbf{F} \quad (7.40)$$

と、ニュートンの方程式

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{F} \quad (7.41)$$

より

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \mathbf{V}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{R}} = 0 \quad (7.42)$$

が得られる。3次元空間での運動の場合には、 $x, y, z$  方向について合わせて3つの運動方程式があることになる。これがラグランジェ形式での重心の運動方程式である。これは質点の運動方程式とまったく同じである。重心の運動は、剛体の質量が重心に集中しているとして考えれば良いことを示している。

## 7.4.3 回転運動

回転運動を与えるラグランジェの運動方程式は、次のように与えられる。

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \Omega_\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi_\alpha} = 0 \quad (7.43)$$

$\alpha = x, y, z$  成分であり、この場合も基本的には3つの運動方程式が存在する。この運動方程式は、ニュートン力学の形式では、角運動量の時間微分が回転力（トルク）に等しいという関係

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{K} \quad (7.44)$$

と同等である。以下でこのことを見てみよう。

- $\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{K}$  について

ここでは重心周りの回転のみについて考える。すなわち、 $\mathbf{V} = 0$ 。この場合には角運動量は、

$$\dot{\mathbf{M}} = \sum_i (\xi_i \times \mathbf{p}_i) \quad (7.45)$$

である。 $\xi_i = \mathbf{R} + \mathbf{r}_i$ ,  $\dot{\xi}_i = \mathbf{V} + \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_i$  であるから、

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{M}} &= \sum_i (\dot{\xi}_i \times \mathbf{p}_i) + \sum_i (\xi_i \times \dot{\mathbf{p}}_i) \\ &= \sum_i (\mathbf{v}_i \times \mathbf{p}_i) + \sum_i (\xi_i \times \dot{\mathbf{p}}_i) \\ &= \sum_i \xi_i \times \mathbf{f}_i \end{aligned} \quad (7.46)$$

$$= \mathbf{K} \quad (7.47)$$

となる。

- ラグランジェ方程式について

剛体が重心周りに微小角  $\delta\varphi$  だけ回転したときのポテンシャルエネルギーの変化は、 $\delta\xi_i = \delta\mathbf{r}_i = \delta\vec{\varphi} \times \mathbf{r}_i$  に注意して、

$$\begin{aligned} \delta U &= \sum_i \frac{\partial U}{\partial \xi_i} \delta \xi_i \\ &= - \sum_i \mathbf{f}_i \delta \mathbf{r}_i \\ &= -\delta\vec{\varphi} \sum_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i) \\ &= -\delta\vec{\varphi} \cdot \mathbf{K} \end{aligned} \quad (7.48)$$

と与えられる。ここで、 $\delta\varphi$  や  $\delta\xi_i$  はベクトルであることに注意されたい。また重心周りの回転であるので、 $\delta\xi_i = \delta r_i$  が成立している。図を描いて確認されたい。以上より、

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{\varphi}} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{\varphi}} = \mathbf{K} \quad (7.49)$$

が得られる。

他方、ラグランジェアンを  $\Omega_\alpha$  で微分すると、

$$\frac{\partial L}{\partial \Omega_\alpha} = \sum_{\beta} I_{\alpha\beta} \Omega_\beta = M_\alpha \quad (7.50)$$

のように、角運動量成分が得られる。これらから、

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \Omega_\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi_\alpha} = \dot{M}_\alpha - K_\alpha = 0 \quad (7.51)$$

の運動方程式が得られる。

## 7.5 例題

### 7.5.1 物理振り子

図7.4のように慣性主軸が  $x, y, z$  軸であり、かつ  $z$  軸周りで対称な剛体を考える。 $z$  軸上に、重心から  $l$  だけ離れた箇所に回転軸があり、 $x$  軸まわりに回転できるとする。この剛体が振動的に運動するときの振動数を求めよ

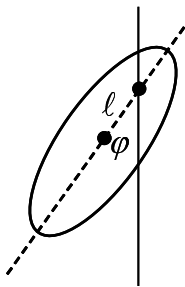


図 7.4: 物理振り子

解答

重心の速度を  $V$ , 角速度ベクトルを  $\Omega$  とすると、ラグランジェアンは、

$$L = T - U \quad (7.52)$$

$$T = \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}(I_x\Omega_x^2 + I_y\Omega_y^2 + I_z\Omega_z^2) \quad (7.53)$$

$$U = mgl(1 - \cos \varphi) \sim \frac{1}{2}mgl\varphi^2 \quad (7.54)$$

となる。ここで  $m$  は剛体の質量、 $I_x, I_y, I_z$  は重心周りの慣性モーメント、 $\varphi$  は振れの角度である。

$z$  軸周りで対称であるから、 $I_x = I_y$ ,  $x$  軸まわりに回転するので、 $\Omega_y = \Omega_z = 0$  である。また  $\Omega_x = \dot{\varphi}$  である。さらに拘束条件から、

$$V = l\dot{\varphi} \quad (7.55)$$

の関係がある。したがって、

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}I_x\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}mgl\varphi^2 \\ &= \frac{1}{2}(m\ell^2 + I_x)\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}mgl\varphi^2 \end{aligned} \quad (7.56)$$

が得られる。

ラグランジェの運動方程式、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \quad (7.57)$$

より

$$(m\ell^2 + I_x)\ddot{\varphi} + mgl\varphi = 0 \quad (7.58)$$

の運動方程式が得られる。これは、振動数が

$$\omega^2 = \frac{mgl}{m\ell^2 + I_x} \quad (7.59)$$

の単振動であることを示している。

なお、回転軸周りの慣性モーメントをはじめから用いると、直接  $m\ell^2 + I_x$  の因子が現れる。

### 7.5.2 斜面を転がる円柱

斜面を滑らずに転がり落ちる円柱を考える。この円柱の転がり落ちる速さを求めよ。回転軸まわりの円柱の慣性モーメントを  $I$ 、質量を  $m$ 、円柱の半径を  $r$  とする。回転軸周りの角速度ベクトルを  $\Omega$  とする。斜面方向に位置  $x$  を定義する。また斜面の傾きを  $\varphi$  とする。



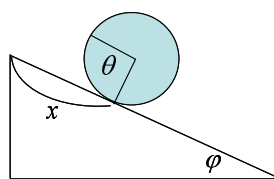


図 7.5: 斜面を転がり落ちる円柱

解答

$\Omega = \dot{\theta}$  であるから運動エネルギーとポテンシャルエネルギーはそれぞれ、

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 \quad (7.60)$$

$$U = -mgx \sin \varphi \quad (7.61)$$

となる。拘束条件は、

$$rd\theta = dx \quad (7.62)$$

であるから、

$$r\dot{\theta} = \dot{x} \quad (7.63)$$

となる。したがって、ラグランジェアンは

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I\frac{\dot{x}^2}{r^2} + mgx \sin \varphi \quad (7.64)$$

となり、ラグランジェ運動方程式

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad (7.65)$$

より

$$\left( m + \frac{I}{r^2} \right) \ddot{x} - mg \sin \varphi = 0 \quad (7.66)$$

が得られる。慣性モーメントとして、

$$I = \frac{1}{2}mr^2 \quad (7.67)$$

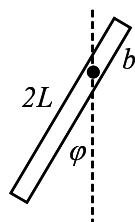
を用いると、

$$\ddot{x} = \frac{2}{3}g \sin \varphi \quad (7.68)$$

となり、重力加速度が一定値小さくなることがわかる。

## 7.6 練習問題

- 問 1 斜面を転がる円柱に対する問題をラグランジェの未定係数法を用いて解け。
- 問 2 剛体に働くすべての力の和  $\mathbf{F} = 0$  の場合には、回転力は座標原点の取り方に依存しないことを示せ。この場合、力  $\mathbf{F}$  を偶力と呼ぶ。
- 問 3 半径  $a$ 、長さ  $2L$ 、質量  $m$  の細長い円柱でできている物理振り子がある。振り子の回転軸は円柱の中心軸を通り、円柱の上端から  $b$  の距離にあるとする。この物理振り子に対するラグランジェアンを書き下し、振り子が微小振動している時の振動数を求めよ。また、回転軸まわりの慣性モーメントを求めよ。



円柱でできた物理振り子

- 問 4 空洞になっている固定された円柱（内側の半径  $R$ ）の内側に沿って滑らずに転がる半径  $a$  の一様な円柱の微小振動を調べよ。ヒント：拘束条件は、 $R\delta\varphi = a(\delta\theta + \delta\varphi)$  である。

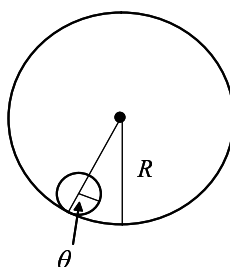


図 7.6: 空洞の円柱内を振動する小円柱の運動

## 第8章 オイラー角とコマの運動

今までは、ラグランジェアンとラグランジェ方程式は慣性テンソルと角速度ベクトルを用いて一般的に書いてきたが、そもそも角速度ベクトルに対応する角度そのものをどうあらわすかについては、考えてこなかった。いくつかの例で示したとおり、対称性のよい場合は直感的に角度のとり方を指定できた。以下では一般的な角度の指定方法について述べる。このような角度を用いると、コマの運動が比較的簡単に記述できることがわかる。

### 8.1 オイラー角

通常問題とする剛体では、ほとんどの場合対称性の良いものを考える。その剛体は固定座標系で指定された空間内で回転運動をしている。今、剛体に固定された座標軸（運動座標系）を考え、それらの軸は剛体の対称性の良い方向に取られているとしよう。以下では、固定座標系の軸を  $(X, Y, Z)$ 、運動座標系の軸を  $(x, y, z)$  とする。剛体の回転運動エネルギーは、対称性の良い方向に座標軸が取られているので

$$T = \frac{1}{2} (I_x \Omega_x^2 + I_y \Omega_y^2 + I_z \Omega_z^2) \quad (8.1)$$

となる。ここで、角速度ベクトルを角度の時間微分としてどのように表せば良いかが問題である。そこでオイラー角を導入する。その定義は図 8.1 で示されているが、固定座標系から運動座標系に次のようにして移行すると考えると理解しやすい。

1.  $Z$  軸周りに図の円盤を角度  $\varphi$  だけ回転させる。
2.  $ON$  軸（交線という）まわりに  $Z$  軸を角度  $\theta$  だけ回転させる。
3. その  $Z$  軸を運動座標系の  $z$  軸とする。
4.  $z$  軸まわりに角度  $\psi$  回転させ、運動座標系の  $x$  軸を定義する。 $y$  軸は自動的に決まる。

このように角度  $(\theta, \varphi, \psi)$  を定義し、その時間時間微分  $(\dot{\theta}, \dot{\varphi}, \dot{\psi})$  を取る。各々の角度の時間変化に対するベクトル  $\vec{\theta}, \vec{\varphi}, \vec{\psi}$  から角速度ベクトル  $\vec{\Omega} = \dot{\theta} + \dot{\varphi} + \dot{\psi}$  が決まる。ベクトル  $\vec{\theta}, \vec{\varphi}, \vec{\psi}$  の  $x, y, z$  成分は

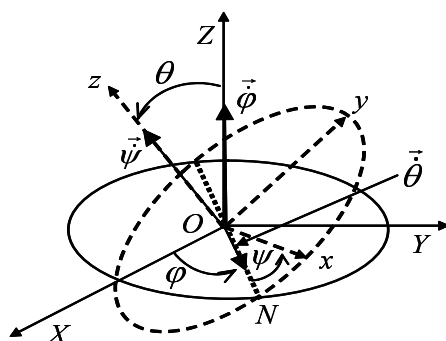


図 8.1: オイラー角

$$\begin{cases} \dot{\theta}_x = \dot{\theta} \cos \psi \\ \dot{\theta}_y = -\dot{\theta} \sin \psi \\ \dot{\theta}_z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{\varphi}_x = \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi \\ \dot{\varphi}_y = \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi \\ \dot{\varphi}_z = \dot{\varphi} \cos \theta \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{\psi}_x = 0 \\ \dot{\psi}_y = 0 \\ \dot{\psi}_z = \dot{\psi} \end{cases} \quad (8.2)$$

となることが図 8.1 からわかる。したがって

$$\begin{cases} \Omega_x = \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \\ \Omega_y = \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi \\ \Omega_z = \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi} \end{cases} \quad (8.3)$$

が得られる。

## 8.2 下端が固定された対称コマ

図 8.2 のような対称コマの重力のものの運動を考えよう。  
このコマに対しては、

- 対称コマ :  $I_x = I_y \neq I_z$
- 重心座標 :  $(X, Y, Z)$
- 運動エネルギー :  $T = \frac{1}{2}m(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2) + \frac{1}{2}(I_x\Omega_x^2 + I_y\Omega_y^2 + I_z\Omega_z^2)$
- ポテンシャルエネルギー :  $U = mgl \cos \theta$
- ラグランアジェアン :  $L = T - U$

である。角度を図 8.1 のように定義する (オイラー角) と、

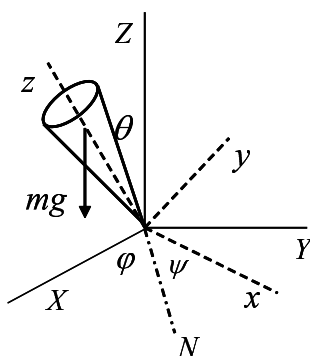


図 8.2: 下端の固定されたコマの回転

$$\begin{cases} X = l \sin \theta \sin \varphi \\ Y = -l \sin \theta \cos \varphi \\ Z = l \cos \theta \end{cases} \quad (8.4)$$

$$\begin{aligned} \dot{Z} &= -l \sin \theta \dot{\theta} \\ \dot{Y} &= -\left( l \dot{\theta} \cos \theta \cos \varphi - l \dot{\varphi} \sin \theta \sin \varphi \right) \\ \dot{X} &= l \dot{\theta} \cos \theta \sin \varphi + l \dot{\varphi} \sin \theta \cos \varphi \end{aligned}$$

となるので、ラグランジアンは

$$L = \frac{1}{2} (I_x + ml^2) (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} I_z (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2 - mgl \cos \theta \quad (8.5)$$

でなる。ここで、 $I_x$  は重心まわりの慣性モーメント、 $I_x + ml^2 = I'_x$  は固定点（原点）まわりの慣性モーメントであることに注意しよう。

### 8.2.1 角運動量保存則

このラグランジアンから保存則が存在することがすぐにわかる。すなわち、 $\varphi, \psi$  は循環座標であるので保存則が二つ存在する。それらは、 $Z$  軸まわりと  $z$  軸まわり角運動保存則である。

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \right) = \frac{d}{dt} \left[ I_z (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) \right] = 0 \quad (8.6)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \frac{d}{dt} \left[ (I'_x \sin^2 \theta + I_z \cos^2 \theta) \dot{\varphi} + I_z \dot{\psi} \cos \theta \right] = 0 \quad (8.7)$$

から、 $M_z$  と  $M_Z$  を定数として、

$$I_z (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) = M_z \quad (8.8)$$

$$(I'_x \sin^2 \theta + I_z \cos^2 \theta) \dot{\varphi} + I_z \dot{\psi} \cos \theta = M_Z \quad (8.9)$$

となる。

$M_z$  と  $M_Z$  は各々、 $z$  軸まわりの角運動量、 $Z$  軸まわりの角運動量であることは次のようにしてわかる。

- 角運動量と角速度ベクトルの関係は、 $M_\alpha = \sum_\beta I_{\alpha\beta} \Omega_\beta$  である。したがって、

$$\begin{aligned} M_z &= I_{zz} \Omega_z \\ &= I_z (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}) \end{aligned} \quad (8.10)$$

- $M_Z$  は  $(M_x, M_y, M_z)$  と次のような関係にある。 $M_Z = M_x \times (x$  と  $Z$  の方向余弦)  $+ M_y \times (y$  と  $Z$  の方向余弦)  $+ M_z \times (z$  と  $Z$  の方向余弦)。  $x$  と  $Z$  の方向余弦は、 $\vec{\varphi}$  の  $x$  成分  $/|\dot{\varphi}| = \sin \theta \sin \psi$ ,  $y$  と  $Z$  の方向余弦は  $\vec{\varphi}$  の  $y$  成分  $/|\dot{\varphi}| = \sin \theta \cos \psi$ ,  $z$  と  $Z$  の方向余弦  $= \cos \theta$  と

$$M_x = I'_x \Omega_x = I'_x (\dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi) \quad (8.11)$$

$$M_y = I'_y \Omega_y = I'_y (\dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi) \quad (8.12)$$

$$M_z = I_z \Omega_z = I_z (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}) \quad (8.13)$$

より

$$\begin{aligned} M_Z &= M_z \cos \theta + I'_y (\dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi) \sin \theta \cos \psi \\ &\quad + I'_x (\dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi) \sin \theta \sin \psi \\ &= M_z \cos \theta + I'_x \dot{\varphi} \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (8.14)$$

ここで、 $I'_y = I'_x$  を用いた。

### 8.2.2 エネルギー保存則と運動の形態

エネルギー保存則  $T + U = E$  (定数) も成立する。ここで、

$$E = T + U = \frac{1}{2} I'_x (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} I_z (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2 + mgl \cos \theta \quad (8.15)$$

である。

$$\dot{\varphi} = \frac{M_Z - M_z \cos \theta}{I'_x \sin^2 \theta} \quad (8.16)$$

$$\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta = \frac{M_z}{I_z} \quad (8.17)$$

の関係を用いると、

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} I'_x \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \frac{(M_Z - M_z \cos \theta)^2}{I'_x \sin^2 \theta} + \frac{1}{2} \frac{M_z^2}{I_z} + mgl \cos \theta \\ &= \frac{1}{2} I'_x \dot{\theta}^2 + mgl + \frac{1}{2} \frac{M_z^2}{I_z} + \frac{1}{2} \frac{(M_Z - M_z \cos \theta)^2}{I'_x \sin^2 \theta} - mgl(1 - \cos \theta) \end{aligned} \quad (8.18)$$

有効ポテンシャルを

$$\tilde{U}(\theta) = \frac{(M_Z - M_z \cos \theta)^2}{2I'_x \sin^2 \theta} - mgl(1 - \cos \theta) \quad (8.19)$$

と定義すると、

$$\frac{1}{2} I'_x \dot{\theta}^2 + \tilde{U}(\theta) = E - \frac{M_z^2}{2I_z} - mgl \equiv E' \quad (8.20)$$

が得られる。 $I'_x = I_x + m\ell^2$  は原点周りの慣性モーメントである。この式をみると、変数が  $\theta$  のみとなったことがわかる。 $\theta$  に関する運動方程式の解は

$$\dot{\theta} = \pm \sqrt{\frac{2}{I'_x} (E' - \tilde{U}(\theta))} \quad (8.21)$$

を解けばよい。これは楕円積分

$$\int dt = t = \pm \int d\theta \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{I'_x} (E' - \tilde{U}(\theta))}} \quad (8.22)$$

で与えられる。注意することは、図 8.3 に示したよう、運動が  $E' - \tilde{U}(\theta) \geq 0$  の領域でのみ可能となることである。

### 8.3 練習問題

問 1  $M_z$  が実際に  $z$  軸まわりの角運動量であることを示せ。

問 2  $M_Z$  が実際に  $Z$  軸まわりの角運動量であることを示せ。

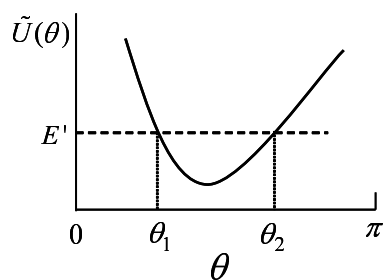


図 8.3: 回転運動の許される領域

問 3 下端が固定された対称コマについて、 $Z$  軸まわりでの回転 ( $\theta = 0$ ) が安定となる条件を求めよ。

ヒント：コマが傾いて  $\theta$  が増すということは、 $\dot{\theta} > 0$  ということである。一方、 $E'$  (8.20) 式を  $\theta$  の 2 次まで残してみる。エネルギー保存則から  $E'$  は一定であることから求めるものが得られる。

問 4 (8.5) 式のラグランジェアンから  $\theta$  に関する運動方程式を書きくだせ。

問 5 前問で求めた運動方程式に、定常才さ運動 ( $\theta = \text{一定}$ 、 $\dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$ ) となる条件を当てはめ、定常才さ運動が可能となる角運動量の範囲を求めよ。



## 第9章 変分原理

力学系の運動（時間発展）や、その定常状態がどのように決定されるか、という問題が力学で取り扱うことであった。ニュートン方程式やラグランジェ方程式を解けばその結果が得られることが、これまでの講義で理解されたと思う。このようなアプローチのほかに、力学の原理を次のように考えるやり方がある。ある量が最小ないしは極小となるように運動または定常状態が定まる、という考え方である。ある量が最小となるということは、その量の1次微分がゼロであることを意味する。このことから微分方程式が導かれる。運動を決定する場合に、最小となるように取られるものは、エネルギーないしは作用である。最小作用の原理から、ラグランジェの運動方程式が導かれる。ここでは作用を最小にするように、ある関数の形を決定する微分方程式が導かれる。それがラグランジェの運動方程式である。定常状態を決定する場合に極小とするものは、問題によって異なる。この場合も定常状態を表す関数形を決定する微分方程式が導かれる。

### 9.1 変分法

変数  $x$  の関数として  $y(x)$  と微係数  $y' = dy(x)/dx$  を定義する。次に、 $x, y, y'$  の関数  $F(x, y, y')$  の  $x$  に関する積分

$$I = \int_a^b F(x, y, y') dx \quad (9.1)$$

を考える。ただし、 $x = a, b$  で  $y(x)$  は一定とする。この時、 $y(x)$  の関数形を変えても  $I$  の値が停留値をとる  $y(x)$  は次の微分方程式を満たす。

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad (9.2)$$

- 証明

$I$  が停留値をとる条件は、 $\delta I = 0$  である。そこで  $y(x)$  を変化させた時の  $I$  の変化  $\delta I$  を求めてみよう。

$$\begin{aligned}
 \delta I &= \int_a^b F(x, y + \delta y, y' + \delta y') dx - \int_a^b F(x, y, y') dx \\
 &= \int_a^b \left\{ F(x, y, y') + \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right\} dx - \int_a^b F(x, y, y') dx \\
 &= \int_a^b \left\{ \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right\} dx \\
 &= \int_a^b \left\{ \frac{\partial F}{\partial y} \delta y - \left( \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta y \right\} dx + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \Big|_a^b \\
 &= \int_a^b \left\{ \frac{\partial F}{\partial y} - \left( \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right\} \delta y \cdot dx
 \end{aligned} \tag{9.3}$$

となるので、恒等的に  $\delta I = 0$  となるためには、

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \tag{9.4}$$

でなくてはならない。

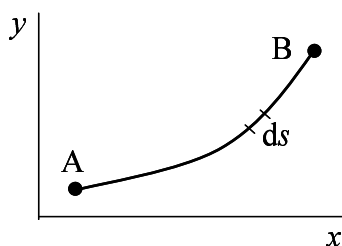


図 9.1: AB 間を結ぶ曲線

● 例題 1

$xy$  平面上の 2 点 A、B を結ぶ曲線のうちで長さが最小となるものを求めよ。

解答

曲線  $y = y(x)$  がある時、 $x = a \sim b$  での曲線の長さは、

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2} dx \tag{9.5}$$

を区間  $[a, b]$  で積分した、

$$I = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (9.6)$$

で与えられる。  $I$  を最小にする  $y(x)$  は、

$$\frac{d}{dx} \left\{ \frac{\partial}{\partial y'} \sqrt{1 + y'^2} \right\} - \frac{\partial}{\partial y} \sqrt{1 + y'^2} = 0 \quad (9.7)$$

であるので、

$$\frac{\partial \sqrt{1 + y'^2}}{\partial y'} = C \quad (9.8)$$

となる。ここで、  $C$  は定数である。すなわち、

$$\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = C \quad (9.9)$$

であり、  $y'$  は一定となり、

$$y = Ax + B \quad (9.10)$$

が得られる。すなわち、直線が求める解である。

## 9.2 条件付き変分法 ( Lagrange の未定係数法 )

関数  $y(x)$  が、  $\int_a^b G(x, y, y') dx = \ell$  を満たすという条件のもとで、  $I = \int_a^b F(x, y, y') dx$  を最小にするような  $y(x)$  を求めるには、

$$\delta \int_a^b \{ F(x, y, y') + \lambda G(x, y, y') \} dx = 0 \quad (9.11)$$

を満たすような  $y(x)$  を求めればよい。ここで  $\lambda$  は Lagrange の未定係数と呼ばれる係数である。  $\lambda$  は  $y(x)$  を  $\lambda$  の関数として求めた後、  $\int_a^b G(x, y, y') = \ell$  を満たすように決める。

## 9.3 最小作用の原理

一般座標  $q$  と一般速度  $\dot{q}$  で決る、ある系の運動を考える。一般座標と一般速度および時間  $t$  の関数として  $L(q_1 \sim q_f, \dot{q}_1 \sim \dot{q}_f, t) \equiv L(q, \dot{q}, t)$  が与えられており、  $t = t_1$  で  $q = q_1, \dot{q} = \dot{q}_1$ 、  $t = t_2$  で  $q = q_2, \dot{q} = \dot{q}_2$  であるとす。ここで、  $q$  は一般座標、  $\dot{q}$  は一般速度である。  $L$  は  $\ddot{q}$  や  $\ddot{q}$  には依存

しない。なぜなら、力学系は位置と速度が時間の関数としても求めれば決定されるからである。

時間区間  $[t_1, t_2]$  で、この系の運動は

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \quad (9.12)$$

を最小にする関数  $q(t)$  として決定される。すなわち、 $\delta S = 0$  ( $S$  を極小にするように) 運動が決定される。これを最小作用の原理と呼ぶ。

このような  $q(t)$  は次の微分方程式を満たすことが変分原理からわかる。

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad (9.13)$$

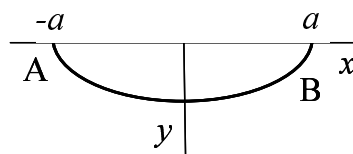
Newton の運動方程式と比較することにより、 $L = T - U$ 、すなわち Lagrangian であることがわかる。自由度が  $f$  の場合には、 $i = 1 \sim f$  に対して、

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (9.14)$$

が成立する。

## 9.4 練習問題

問 1 線密度  $\rho$  の糸の両端を固定し、これを重力場のなかでつるす時、どのような形をとるか。次の手順に従って解け。



水平な点 A、B で固定されて  
吊るされた糸

(1) 糸はそのエネルギーを最小にするような状態となる。運動エネルギーはないので、位置エネルギーを最小にすれば良い。全位置エネルギーは

$$E = \rho g \int_{-a}^a y \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (9.15)$$

となることを示せ。

- (2) 束縛条件(糸の長さが一定)に対してラグランジェ未定係数法を用い、 $E$ を $\rho g$ で割って長さの次元にすると、

$$I = \int_{-a}^a (y + \lambda) \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (9.16)$$

を最小とすればよいこと、すなわち、式(1)における $F$ は、

$$F = (y + \lambda) \sqrt{1 + y'^2} \quad (9.17)$$

となることを示せ。

- (3)  $F$ を決定する微分方程式は、

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad (9.18)$$

である。これから、

$$\frac{d}{dx} \left[ (y + \lambda) \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right] - \sqrt{1 + y'^2} = 0 \quad (9.19)$$

が得られることを示せ。

- (4) ここで、

$$f \equiv y' \quad (9.20)$$

とおくと、上の微分方程式が、

$$f(y + \lambda) \frac{df}{dy} = (1 + f^2) \quad (9.21)$$

のように変形できることを示せ。

- (5) 変数分離を行い積分を実行し、適当に式変形を行うと、

$$\frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{y + \lambda}{c_1}\right)^2 - 1}} = \pm dx \quad (9.22)$$

のようにさらに変数分離した形となることを示せ。

- (6) ここで

$$u \equiv \frac{y + \lambda}{c_1} \quad (9.23)$$

と置くと、次のように積分できることを示せ。

$$u = \frac{1}{2} (e^\alpha + e^{-\alpha}) \quad (9.24)$$

ただし、

$$\alpha \equiv \frac{x + c_2}{c_1} \quad (9.25)$$

と置いている。±の符号が現れるが、これは  $c_1, c_2$  の符号に繰り込んでいる。

(7) 境界条件  $y(x = \pm a) = 0$  を用いると、

$$c_2 = 0 \quad (9.26)$$

が得られることを示せ。

したがって

$$y = \frac{c_1}{2} \left( e^{\frac{x}{c_1}} + e^{-\frac{x}{c_1}} \right) - \lambda \quad (9.27)$$

となるが、長さが  $\ell$  であることから  $c_1$  が定まる。 $\lambda$  は境界条件から定まる。

## 第10章 仮想仕事の原理

仮想仕事の原理も変分原理と基本的に同等である。定常状態すなわち釣り合いの状態から、その状態を多少変化させても仕事がゼロとなる、という考え方から釣り合い状態そのものを決定しようという考え方である。

### 10.1 仮想仕事の原理

力  $\mathbf{F}$  が作用している系を  $\delta \mathbf{r}$  だけ変位させる時の仕事は  $\delta W = \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{r}$  である。系が釣り合いの状態あり ( $\mathbf{F} = 0$ )、変位の間で力は変化しないとすると、 $\delta W = 0$  となる。これを、釣り合いの条件と考えることができる。

力  $\mathbf{F}$  を系に作用している外力  $\mathbf{F}_0$  と束縛力  $\mathbf{R}$  とにわけると、すなわち、

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_0 + \mathbf{R} \quad (10.1)$$

変位  $\delta \mathbf{r}$  を束縛条件を満たすようにとると、一般に、

$$\mathbf{R} \cdot \delta \mathbf{r} = 0 \quad (10.2)$$

となる。もっとも簡単な例は、平面上に静止している物体を平面にそって動かす場合であり、束縛力（抗力）を  $\mathbf{R}$  とすると、 $\mathbf{R} \cdot \delta \mathbf{r} = 0$  である。従って、 $\delta \mathbf{r}$  が束縛条件を破らないように変位すると、

$$\mathbf{F}_0 \cdot \delta \mathbf{r} = 0 \quad (10.3)$$

となる。これを仮想仕事の原理という。

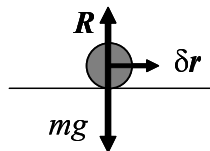


図 10.1: 仮想仕事を表す簡単な例

- 例題

半径  $a$  の球面  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  の上に束縛されている質点の釣り合いの位置を求めよ。

解答 外力は  $F = (F_x, F_y, F_z) = (0, 0, -mg)$  であるので、 $F \cdot \delta r = 0$  より

$$F_z \cdot \delta z = -mg \delta z = 0 \quad (10.4)$$

となる。ここで、極座標をもちいると、

$$z = a \cos \theta \quad (10.5)$$

なので、束縛条件を満たす変位は

$$\delta z = -a \sin \theta \delta \theta \quad (10.6)$$

である。したがって、仮想仕事の原理は、

$$mga \sin \theta \delta \theta = 0 \quad (10.7)$$

と表すことができる。 $\delta \theta$  は任意の微小量であるので、 $\sin \theta = 0$ , すなわち  $\theta = 0, \pi$  がつりあいの位置である。これは、 $x = y = 0, z = \pm a$  がつりあいの位置であることを意味する。

## 10.2 ダランベールの原理

Newton の運動方程式  $\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{F}$  を  $\mathbf{F} - \dot{\mathbf{P}} = 0$  と書き直すと、これは釣り合いの式と考えられる。従って、束縛条件を満たす変位  $\delta \mathbf{r}$  に対して

$$(\mathbf{F} - \dot{\mathbf{P}}) \delta \mathbf{r} = 0 \quad (10.8)$$

が成立する。これをダランベールの原理という。一般には、

$$\sum_i (\mathbf{F}_i - \dot{\mathbf{P}}_i) \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (10.9)$$

## 10.3 ラグランジェ方程式の導出

ダランベールの原理からラグランジェ方程式を導出してみよう。束縛条件を満たすような変位  $\delta \mathbf{r}$  は直交座標系で表せるとは限らない。そこで、束縛条件を表現しやすいような座標系 (一般座標  $\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ ) を導入する。

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \quad (10.10)$$



すると、この時間についての全微分より

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \equiv \mathbf{v}_i \quad (10.11)$$

が、 $q_k \rightarrow q_k + \delta q_k$  の変化による  $\mathbf{r}_i$  の変化として

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_k \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k \quad (10.12)$$

が得られる。また、次の式により一般化力  $Q_k$  を導入する。

$$\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_i \sum_k \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k \equiv \sum_k Q_k \delta q_k \quad (10.13)$$

すなわち、

$$Q_k \equiv \sum_i \mathbf{F}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \quad (10.14)$$

である。

ここで次のような式変形をおこなう。

$$\begin{aligned} \sum_i \dot{\mathbf{P}}_i \delta \mathbf{r}_i &= \sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \delta \mathbf{r}_i \quad (10.15) \\ &= \sum_i \sum_k m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k \\ &= \sum_i \sum_k \left[ \frac{d}{dt} \left( m_i \dot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \right) - m_i \dot{\mathbf{r}}_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \right) \right] \delta q_k \\ &= \sum_i \sum_k \left[ \frac{d}{dt} \left( m_i \mathbf{v}_i \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_k} \right) - m_i \mathbf{v}_i \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_k} \right] \delta q_k \\ &= \sum_i \sum_k \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q_k} \left( \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^2 \right) \right] \delta q_k \\ &= \sum_k \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} T \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} \right] \delta q_k \quad (10.16) \end{aligned}$$

以上の関係式を用いると、 $\sum_i (\mathbf{F}_i - \dot{\mathbf{P}}_i) \delta \mathbf{r}_i = 0$  は次のように変形できる。

$$\sum_k \left[ Q_k - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) + \frac{\partial T}{\partial q_k} \right] \delta q_k = 0 \quad (10.17)$$

ただし、ここで  $T$  は系の運動エネルギーである。束縛条件を満たす範囲内で  $\delta q_k$  は任意である。従って、

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k \quad (10.18)$$

ポテンシャル  $U$  を  $Q_k = -\partial U / \partial q_k$  と定義し、さらにポテンシャルは速度に依存しないとすると、 $L = T - U$  として、

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad (10.19)$$

これは、ラグランジェ方程式である。

## 10.4 練習問題

問 1 (10.16) 式を確かめよ。またこの式変形で、

$$\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} = \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_k} \quad (10.20)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \right) = \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_k} \quad (10.21)$$

を用いた。これらを証明せよ。ヒント： $\mathbf{v}_i = \sum_{\ell} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_{\ell}} \dot{q}_{\ell} + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}$  を用いよ。

## 第11章 ハミルトンの原理

これまでは、運動を表す変数として位置と速度を用いてきた。ハミルトンの表現では、速度の代わりに運動量を用いる。この結果、ラグランジェアンに代わってハミルトニアンという量が導入される。これは全エネルギーそのものである。また運動方程式として、1次微分のみで表される2つの連立方程式が得られる。これをハミルトンの運動方程式という。2次微分は含まれないものの、連立方程式となっており、実質的にラグランジェの方程式、ニュートン方程式と同じである。

### 11.1 ハミルトン方程式

ラグランジェアンの変数は座標  $q$  と速度  $\dot{q}$ 、すなわち  $L(q, \dot{q}, t)$  である。ところが速度を変数とするよりは運動量  $p$  を変数とするほうが良い。なぜなら保存量は運動量であるからである。特に量子力学では保存量を用いて状態が指定されるため、運動量を用いる体系が良い。以下では、座標と運動量を用いた運動方程式を導くことにしよう。運動量の定義は

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \quad (11.1)$$

である。ここで、 $q, \dot{q}$  から  $q, p$  への変数変換を行う。

まず、時間を頭に含まないラグランジェアン  $L(q, \dot{q})$  の全微分（完全導関数）を書き下そう。

$$\begin{aligned} dL &= \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \\ &= \sum_i \dot{p}_i dq_i + \sum_i p_i d\dot{q}_i \\ &= \sum_i \dot{p}_i dq_i + d\left(\sum_i p_i \dot{q}_i\right) - \sum_i \dot{q}_i dp_i \end{aligned} \quad (11.2)$$

したがって、

$$d\left(L - \sum_i p_i \dot{q}_i\right) = \sum_i \dot{p}_i dq_i - \sum_i \dot{q}_i dp_i \quad (11.3)$$

となる。ここで、

$$L - \sum_i p_i \dot{q}_i = -H(p, q) \quad (11.4)$$

で与えられる関数  $H(q, p)$  を定義する。これをハミルトニアンという。 $H = T + U$  であり、全エネルギーに対応することが具体的な計算からわかる。また、この関数の変数が  $q = \{q_i\}, p = \{p_i\}$  であることは、上式左辺の全微分の形からわかる。これは、ルジャンドル変換の一種でもある。

次に  $H(q, p)$  に対する運動方程式を次のようにして導く。

$$dH = \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i \quad (11.5)$$

と上式とを比較して、次の自由度の数  $\times 2$  個の変数  $\{q_i(t), p_i(t)\}$  についての連立一階微分方程式が得られる。

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i \quad (11.6)$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \quad (11.7)$$

これらをハミルトン方程式という。

## 11.2 ハミルトンの原理

最小作用の原理からハミルトン方程式が直接次のようにして導かれる。最小作用の原理は

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) dt \quad (11.8)$$

を最小（極小）にするように運動が定まる、 $(\delta S = 0)$  というものであった。この式のラグランジェアンに

$$L = \sum_i p_i \dot{q}_i - H \quad (11.9)$$

を代入すると、

$$\begin{aligned} S &= \int_{t_1}^{t_2} \left( \sum_i p_i \dot{q}_i - H \right) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left( \sum_i p_i dq_i - H dt \right) \end{aligned} \quad (11.10)$$

したがって、

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left( \delta p_i dq_i + p_i d(\delta q_i) - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i dt - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i dt \right) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \delta p_i \left( dq_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} dt \right) + \sum_i p_i \delta q_i \Big|_{q_i(t_1)}^{q_i(t_2)} - \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \delta q_i \left( dp_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} dt \right)\end{aligned}\quad (11.11)$$

上式第 2 項はゼロであるので、任意の  $\delta p_i, \delta q_i$  に対して  $\delta S = 0$  となるためには、

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i \quad (11.12)$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \quad (11.13)$$

でなくてはならない。このようにしてハミルトンの方程式が導かれた。ハミルトニアンを用いて最小作用の原理を記述することをハミルトンの原理という。

### 11.3 ポワッソン括弧式

ある関数  $f(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t)$  の時間  $t$  に関する完全導関数（全微分）を考える。

$$\begin{aligned}\frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \left( \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} \right) \\ &\equiv \frac{\partial f}{\partial t} + \{H, f\}\end{aligned}\quad (11.14)$$

$\{\dots\}$  をポワッソン括弧式という。

座標と運動量を変数とする関数が系の運動の間一定であるとき、その関数を運動の恒量（積分）と呼ぶ。上記の  $f$  が運動の恒量である条件は

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{H, f\} = 0 \quad (11.15)$$

である。これは、 $f$  が時間に顕に依存しないときには、

$$\{H, f\} = 0 \quad (11.16)$$

とあらわすことができる。時間微分を取らなくても、時間依存性があるかないか判定できることになる。

なお、任意の一对の関数、 $f, g$  に対するポワソン括弧式を一般に次のように定義する。

$$\{f, g\} = \sum_i \left( \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \right) \quad (11.17)$$

この括弧式は本章では特に何かに利用することは考えないが、この形式が量子力学に登場する交換関係と同じ形式であることに着目することが大事である。量子力学においても、変数が位置と運動量とで表される。

## 11.4 例題 1次元調和振動子

1次元調和振動子のラグランジェアンからハミルトニアンを求め、ハミルトン運動方程式を書き下せ。ただし適当  $j$  な変数変換をおこなって位置と運動量が同等な表現となるようにせよ。

単振動のラグランジェアンは

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2x^2 \quad (11.18)$$

であった。したがって、運動量とハミルトニアンは

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \quad (11.19)$$

$$\begin{aligned} H &= p\dot{x} - L \\ &= \frac{1}{m}p^2 - \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega^2x^2 \\ &= \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega^2x^2 \end{aligned} \quad (11.20)$$

である。

まず、ハミルトニアンを座標と運動量について対称的にする。そこで、

$$q = \gamma x \quad (11.21)$$

としてラグランジェアンを書き直す。

$$L = \frac{m}{2\gamma^2} (\dot{q}^2 - \omega^2 q^2) \quad (11.22)$$

これから運動量とハミルトニアンを決めると

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{m}{\gamma^2} \dot{q} \quad (11.23)$$

$$H = \frac{\gamma^2}{2m} p^2 + \frac{m}{2\gamma^2} \omega^2 q^2 \quad (11.24)$$

となる。

$$\frac{\gamma^2}{2m} = \frac{m\omega^2}{2\gamma^2} \quad (11.25)$$

となるように、 $\gamma$  を決めると、 $\gamma^2 = m\omega$  となり、

$$H = \frac{\omega}{2} (p^2 + q^2) \quad (11.26)$$

である。したがって、ハミルトン方程式は、

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \omega p \quad (11.27)$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -\omega q \quad (11.28)$$

となる。これから、

$$\ddot{p} + \omega^2 p = 0 \quad (11.29)$$

の単振動の運動方程式が得られる。なお、

$$p^2 + q^2 = \frac{2E}{\omega} \quad (11.30)$$

は一定であり、エネルギー保存を示す。

## 11.5 正準変換

座標と運動量  $\{q, p\}$  を変数とするハミルトンの表示は、ハミルトンの原理を満たすようなものであり、ハミルトン運動方程式が成立していた。ここでさらに変数変換  $\{q, p\} \rightarrow \{Q, P\}$  を考える。この座標変換を行ったあとでも、ハミルトン方程式が成り立っているような変換を正準変換という。すなわち、

$$Q_i = Q_i(q_1 \sim q_f, p_1 \sim p_f) \quad (11.31)$$

$$P_i = P_i(q_1 \sim q_f, p_1 \sim p_f) \quad (11.32)$$

$$H = H(Q_1 \sim Q_f, P_1 \sim P_f, t) \quad (11.33)$$

に対して、

$$\frac{\partial H}{\partial P_1} = \dot{Q}_1 \quad (11.34)$$

$$\frac{\partial H}{\partial Q_1} = -\dot{P}_1 \quad (11.35)$$

を満たすとき、正準変換と呼ぶわけである。

ある変数変換が正準変換となるための条件を求めてみよう。 $\{q, p\} \rightarrow \{Q, P\}$  が正準変換となるためには、 $\{Q, P\}$  がハミルトンの原理を満たせばよい。すなわち、

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_i P_i \dot{Q}_i - \mathcal{H} \right\} dt \quad (11.36)$$

$$\delta S = 0. \quad (11.37)$$

これが成立するためには、

$$\sum_i p_i \dot{q}_i - H(q, p, t) = \sum_i P_i \dot{Q}_i - \mathcal{H}(Q, P, t) + \frac{dW}{dt} \quad (11.38)$$

$W$  であれば良い。なぜならば、

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{dW}{dt} dt = \delta (W_2 - W_1) = 0 \quad (11.39)$$

であるからである。ここで、 $W$  は母関数と呼ばれるもので、 $Q_1 \sim Q_f, P_1 \sim P_f, t$  の任意の関数である。ただし、1 価連続で微分可能な関数でなければならない。この母関数が定まれば、上式により変数変換ができることになる。

## 11.6 ハミルトン・ヤコビの方程式

母関数を与えて、変数変換を行うことを考えてみよう。簡単のため変数の添え字を省略しよう。母関数の変数は

$$W = W(Q, P, t) \quad (11.40)$$

であったが、これを、

$$W = W(q, p, t) \quad (11.41)$$

としよう。これはいつでも可能である。なぜなら、

$$Q = Q(q, p, t) \quad (11.42)$$

$$P = P(q, p, t) \quad (11.43)$$

であり、これらを解いて、

$$q = q(P, Q, t) \quad (11.44)$$

$$p = p(P, Q, t) \quad (11.45)$$



とし、上式第 1 式を解いて

$$P = P(q, Q, t) \quad (11.46)$$

を  $W = W(Q, P, t)$  に代入すれば良いからである。

さて、このようにとると、

$$\frac{dW}{dt} = \sum_i \frac{\partial W}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial W}{\partial Q_i} \dot{Q}_i + \frac{\partial W}{\partial t} \quad (11.47)$$

となり、したがって、

$$\sum_i p_i \dot{q}_i - H = \sum_i P_i \dot{Q}_i - \mathcal{H} + \sum_i \frac{\partial W}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial W}{\partial Q_i} \dot{Q}_i + \frac{\partial W}{\partial t} \quad (11.48)$$

$$\sum_i \left( p_i - \frac{\partial W}{\partial q_i} \right) \dot{q}_i - \sum_i \left( P_i + \frac{\partial W}{\partial Q_i} \right) \dot{Q}_i = H - \mathcal{H} + \frac{\partial W}{\partial t} \quad (11.49)$$

これは恒等式であるので、

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i} \quad (11.50)$$

$$P_i = \frac{\partial W}{\partial Q_i} \quad (11.51)$$

$$\mathcal{H} = H + \frac{\partial W}{\partial t} \quad (11.52)$$

が得られる。

- $W$  が  $t$  に依存しない場合は、 $\mathcal{H} = H(p, q)$  である。
- $W = \sum_i q_i Q_i$  とすると、 $p_i = Q_i$ 、 $P = -q_i$  となり、座標と運動量が入れ替わってしまう。このような変換のあとでは、変数を座標・運動量と呼ぶことは意味が無くなってしまふ。このような関係にある変数を、正準共役量と呼ぶ。
- $H = 0$  となるような正準変換を求めると、もはや運動方程式を解く必要がなくなる。このような正準変換を求めることは、

$$H + \frac{\partial W}{\partial t} = 0 \quad (11.53)$$

となる母関数を求めることにほかならない。この式をハミルトン・ヤコビの方程式と呼ぶ。本稿ではこれを解くことは行わない。数学的になりすぎ、簡単な母関数を求めるのも、かえって面倒となるからである。

## 11.7 練習問題

問 1 ポテンシャル  $U(x, y, z)$  中の一個の質点のハミルトニアンを書け。

問 2 単振動する系のハミルトニアンを書け。

問 3 ハミルトニアンが顕に時間を含まない時、エネルギー保存が成立することを示せ。

問 4 次の関係式を証明せよ。

$$\{f, g\} = -\{g, f\} \quad (11.54)$$

$$\{f_1 + f_2, g\} = \{f_1, g\} + \{f_2, g\} \quad (11.55)$$

$$\{f_1 \cdot f_2, g\} = f_1 \{f_2, g\} + f_2 \{f_1, g\} \quad (11.56)$$

$$\{f, q_i\} = \frac{\partial f}{\partial p_i}, \quad \{f, p_i\} = -\frac{\partial f}{\partial q_i} \quad (11.57)$$

$$\{q_i, q_j\} = 0, \quad \{p_i, p_j\} = 0, \quad \{p_i, q_j\} = \delta_{ij} \quad (11.58)$$

問 5 中心力場の中を運動する質点の角運動量を  $\mathbf{M} = (M_x, M_y, M_z)$  とする。 $\frac{dM_x}{dt} = 0$  などを示すことにより、角運動保存を示せ。

問 6 ヤコビの恒等式  $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$  を証明せよ。

問 7  $f$  と  $g$  が運動の恒量である時、 $\{f, g\}$  も運動の恒量となる事を示せ。

問 8 ポワッソンの括弧式について次の関係式を証明せよ。

$$\frac{\partial}{\partial t} \{f, g\} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}, g \right\} + \left\{ f, \frac{\partial g}{\partial t} \right\} \quad (11.59)$$

$$\frac{d}{dt} \{f, g\} = \left\{ \frac{df}{dt}, g \right\} + \left\{ f, \frac{dg}{dt} \right\} \quad (11.60)$$