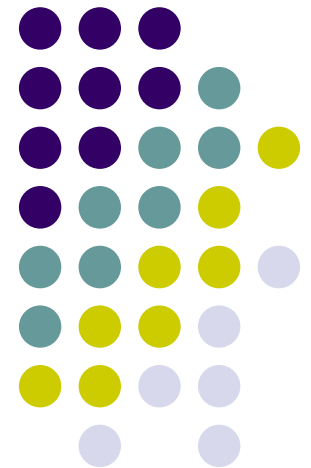


# 3次元形状を2次元面に 投影する

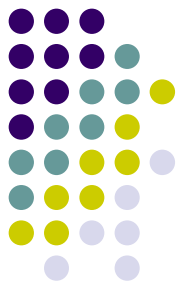
教科書 5章





## 3次元形状の2次元面への投影

- CGでは、モデリングされた形状をディスプレイに表示したり、プリンタで印刷することによって立体を表現する.
- その際、3次元空間内に定義した形状を2次元面上に投影する変換(投影変換)が必要となる.



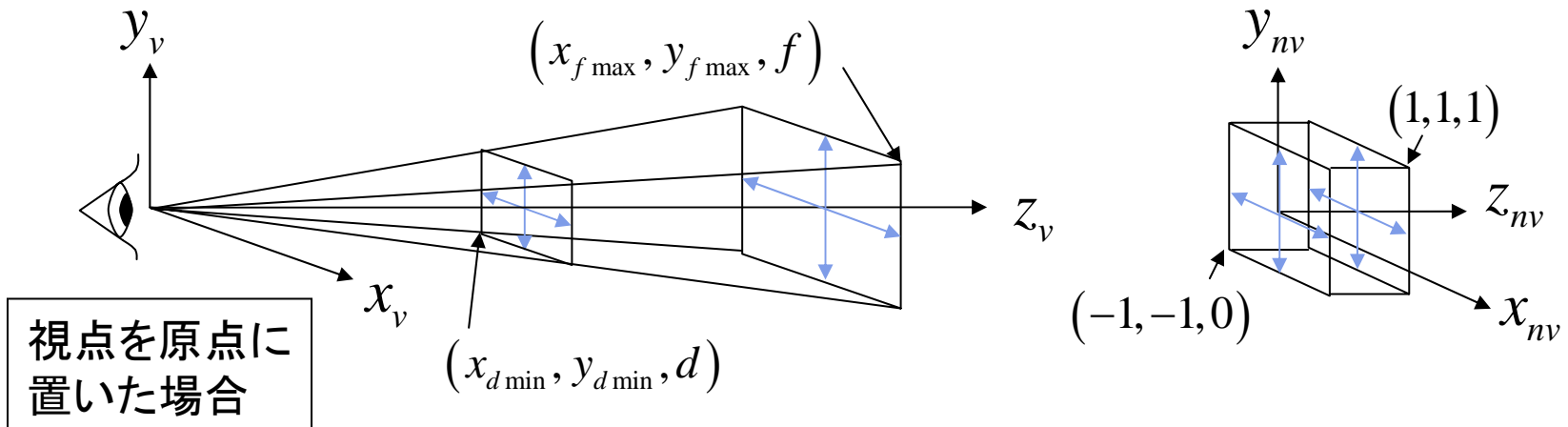
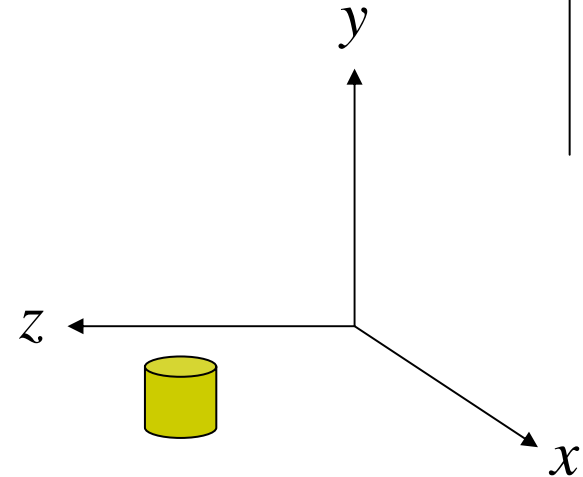
# 3つの座標系

- これからの議論を明確にするために3つの座標系を定義する.
  - 全体座標系 (world coordinate system):  $(x, y, z)$ 
    - 3次元モデルが定義されている座標系 (右手系)
  - 視座標系 (viewing coordinate system):  $(x_v, y_v, z_v)$ 
    - 視線を  $z_v$  軸とした座標系 (通常, 左手系)
  - 正規化視座標系 (normalized viewing coordinate system):  $(x_{nv}, y_{nv}, z_{nv})$ 
    - 視座標系の可視領域を正規化した座標系 (通常, 左手系)
    - 隠面・隠線処理で必要となる.

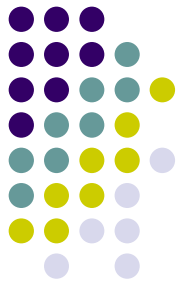
# 3つの座標系(cont.)

- 座標系の定義(cont.)

- 全体座標系:  $(x, y, z)$
- 視座標系:  $(x_v, y_v, z_v)$
- 正規化視座標系:  $(x_{nv}, y_{nv}, z_{nv})$



視点を原点に  
置いた場合



# 投影変換

## ● 投影変換とは

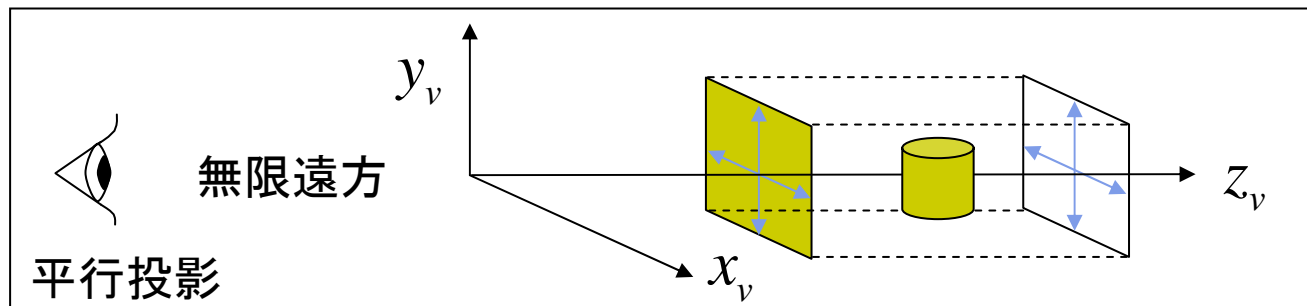
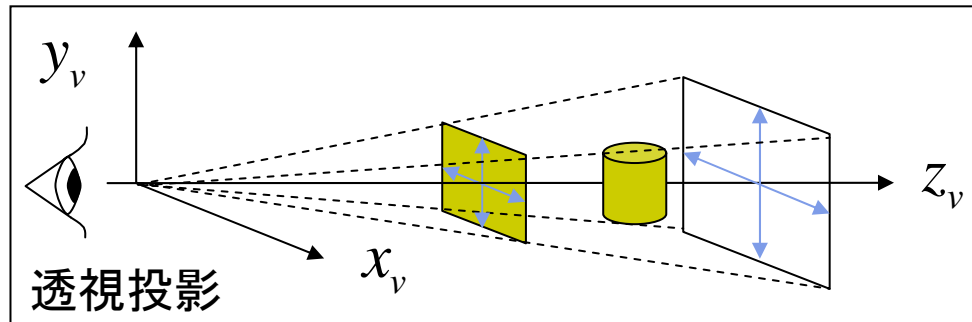
- 3次元空間内に定義した形状を2次元面上に投影する変換

- 透視投影変換

- 視点を  $z_v$  軸上に置いて、 $z_v$  軸に垂直な面に投影する変換

- 平行投影変換

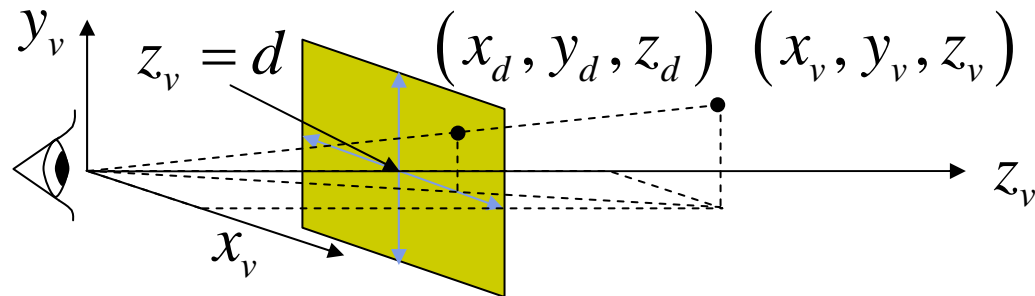
- 視座標系の原点を全体座標系の原点から無限遠方において、 $z_v$  軸に垂直な面に投影する変換



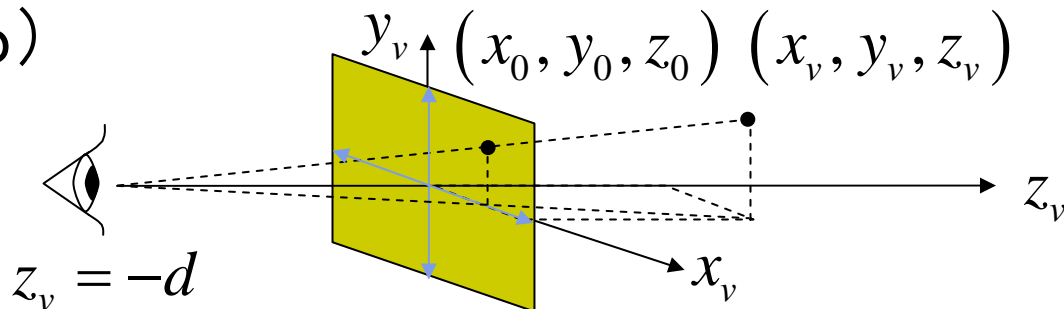


# 透視投影変換

- 透視投影変換では視点と投影面の位置を違った2つの変換が使われる。
  - 視点  $z_v = 0$ , 投影面  $z_v = d$  (通常こちらが使われる)



- 視点  $z_v = -d$ , 投影面  $z_v = 0$  ( $d \rightarrow \infty$  のとき平行投影変換となる)

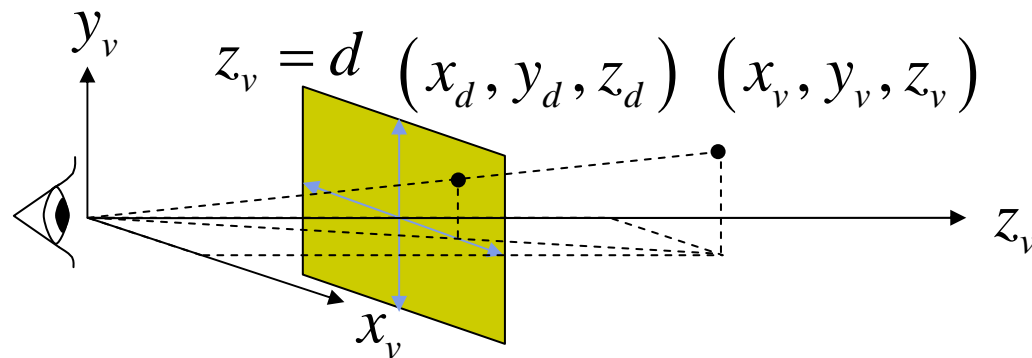




# 透視投影変換(cont.)

- 視点  $z_v = 0$ , 投影面  $z_v = d$  のときの透視投影変換
  - 点  $(x_v, y_v, z_v)$  と投影点  $(x_d, y_d, z_d)$  の関係は次式となる.

$$\frac{x_d}{d} = \frac{x_v}{z_v}, \quad \frac{y_d}{d} = \frac{y_v}{z_v}, \quad z_d = d \Rightarrow x_d = \frac{x_v}{z_v/d}, \quad y_d = \frac{y_v}{z_v/d}, \quad z_d = d$$





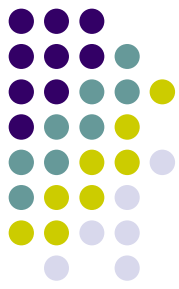
# 透視投影変換(cont.)

- 視点  $z_v = 0$ , 投影面  $z_v = d$  (cont.)
  - これらの関係を同次座標で表せば次式となる.

$$\begin{Bmatrix} X_d \\ Y_d \\ Z_d \\ W_d \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/d & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \\ 1 \end{Bmatrix}$$

- 実際, 次のようになる.

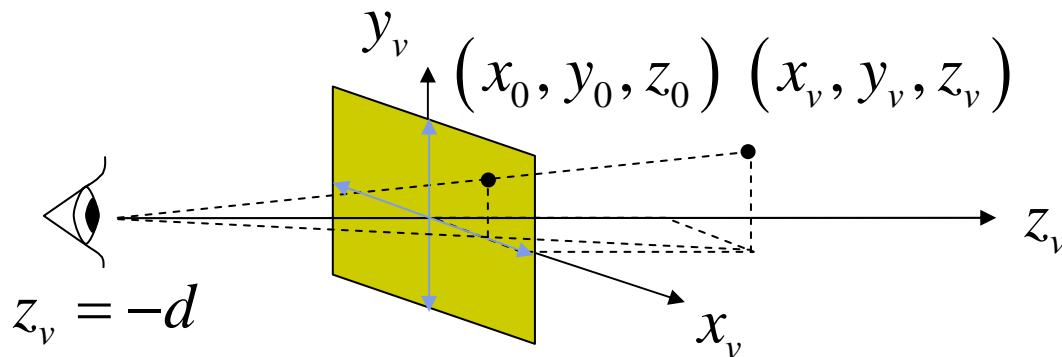
$$\begin{Bmatrix} X_d \\ Y_d \\ Z_d \\ W_d \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \\ z_v/d \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} x_d \\ y_d \\ z_d \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{x_v}{z_v/d} \\ \frac{y_v}{z_v/d} \\ d \end{Bmatrix}$$



# 透視投影変換(cont.)

- 視点  $z_v = -d$ , 投影面  $z_v = 0$  の透視投影変換
  - 点  $(x_v, y_v, z_v)$  と投影点  $(x_0, y_0, z_0)$  の関係は次式となる.

$$\frac{x_0}{d} = \frac{x_v}{z_v + d}, \quad \frac{y_0}{d} = \frac{y_v}{z_v + d}, \quad z_0 = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{x_v}{1 + z_v/d}, \quad y_0 = \frac{y_v}{1 + z_v/d}, \quad z_0 = 0$$





# 透視投影変換(cont.)

- 視点  $z_v = -d$ , 投影面  $z_v = 0$  (cont.)
  - これらの関係を同次座標で表せば次式となる.

$$\begin{Bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \\ W_0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/d & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \\ 1 \end{Bmatrix}$$

- 実際, 次のようになる.

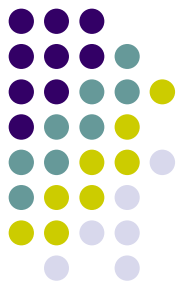
$$\begin{Bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \\ W_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_v \\ y_v \\ 0 \\ 1 + z_v/d \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{x_v}{1 + z_v/d} \\ \frac{y_v}{1 + z_v/d} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

- $d \rightarrow \infty$  のとき平行投影変換となる.



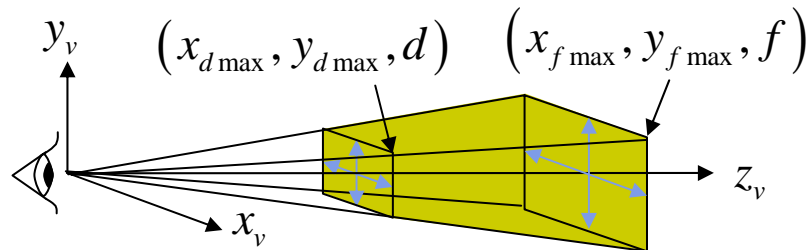
# 正規化視座標系への変換

- 透視投影変換により3次元空間内の点が投影面に変換されることから、直線や平面も投影面に変換可能である。
- しかし、透視投影変換では奥行き情報が失われる。
- 立体を認識するためには奥行き情報に基づく隠面・隠線処理が必要となる。
- 透視投影変換の奥行き情報は正規化視座標系で表現される。

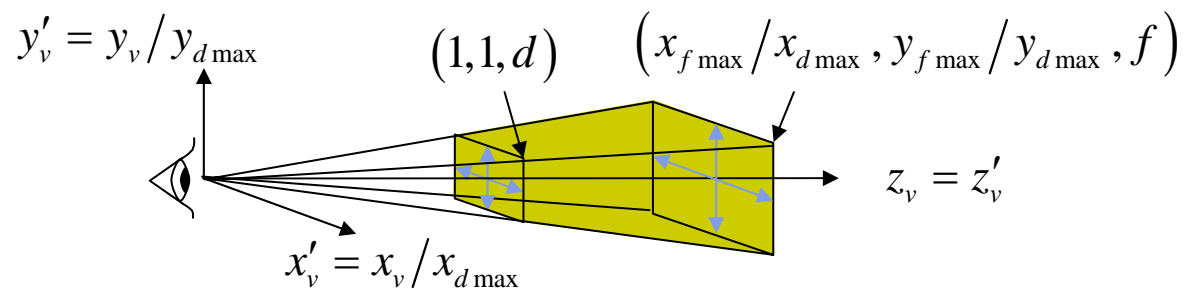


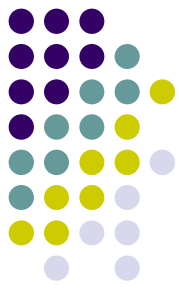
# 正規化視座標系への変換(cont.)

- 視点  $z_v = 0$ , 投影面  $z_v = d$  として, 可視領域 (viewing volume) を  $d \leq z_v \leq f$  と仮定する.



- $x_v$ - $y_v$  正規化視座標系:  $(x'_v, y'_v, z'_v)$





# 正規化視座標系への変換(cont.)

- 可視領域を  $d \leq z_v \leq f$  と仮定する. (cont.)
  - $x_v$ - $y_v$  正規化座標系:  $(x'_v, y'_v, z'_v)$  への変換

$$\begin{Bmatrix} X'_v \\ Y'_v \\ Z'_v \\ W'_v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/x_{d \max} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/y_{d \max} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \\ 1 \end{Bmatrix}$$

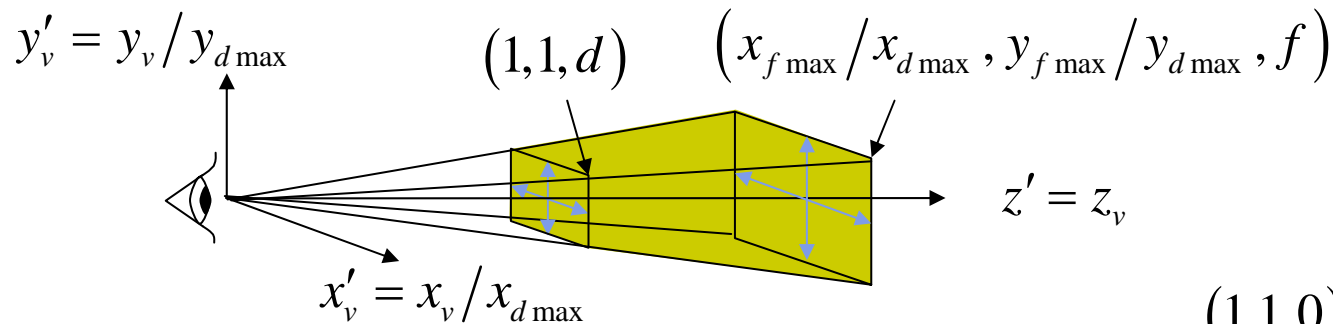
- 実際, 次のようになる.

$$\begin{Bmatrix} X'_v \\ Y'_v \\ Z'_v \\ W'_v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_v/x_{d \max} \\ y_v/y_{d \max} \\ z_v \\ 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_v/x_{d \max} \\ y_v/y_{d \max} \\ z_v \end{Bmatrix}$$



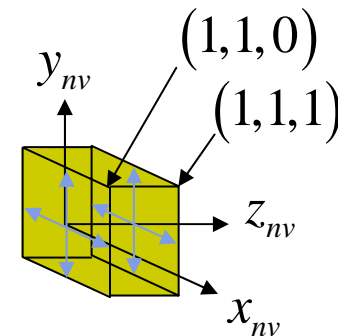
# 正規化視座標系への変換(cont.)

- 可視領域を  $d \leq z_v \leq f$  と仮定する. (cont.)
  - 正規化視座標系:  $(x_{nv}, y_{nv}, z_{nv})$  を想定して, 可視領域が次のように変換されるような変換を考えよう.



$$\frac{x_{nv}}{d} = \frac{x'_v}{z'_v}, \quad \frac{y_{nv}}{d} = \frac{y'_v}{z'_v}, \quad z_{nv} = \alpha + \frac{\beta}{z'_v} = \frac{-1}{1-d/f} \frac{d}{z'_v} + \frac{1}{1-d/f} \frac{z'_v}{d} \frac{d}{z'_v}$$

$$\therefore \left. \begin{array}{l} z'_v = d \Rightarrow z_{nv} = 0 \\ z'_v = f \Rightarrow z_{nv} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{1-d/f} \\ \beta = \frac{-d}{1-d/f} \end{cases}$$





# 正規化視座標系への変換(cont.)

- 可視領域を  $d \leq z_v \leq f$  と仮定する. (cont.)
  - 正規化視座標系:  $(x_{nv}, y_{nv}, z_{nv})$  への変換

$$\begin{Bmatrix} X_{nv} \\ Y_{nv} \\ Z_{nv} \\ W_{nv} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1/d}{1-d/f} & \frac{-1}{1-d/f} \\ 0 & 0 & 1/d & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x'_v \\ y'_v \\ z'_v \\ 1 \end{Bmatrix}$$

- 実際, 次のようになる.

$$z'_v = d \Rightarrow \begin{Bmatrix} x_{nv} \\ y_{nv} \\ z_{nv} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad z'_v = f \Rightarrow \begin{Bmatrix} x_{nv} \\ y_{nv} \\ z_{nv} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} x'_v \\ y'_v \\ \frac{-1 + z'_v/d}{1 - (d/f)} \\ z'_v/d \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} x_{nv} \\ y_{nv} \\ z_{nv} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x'_v / (z'_v/d) \\ y'_v / (z'_v/d) \\ \frac{-1 / (z'_v/d) + 1}{1 - (d/f)} \end{Bmatrix}$$