オートマトン・形式言語特論　レポート２解答例　　　　　　　　　　　　　　　2010.5.7 提出期限分

問 1 $\mathcal{F} = \{f(,), g(), a\}$ について、$L_1 = \{f(f(a, s), g(t)) \mid s, t \in \mathrm{T}(\mathcal{F})\}$ を認識する NFTA A を、等価な DFTA に変換せよ。

$A = (\{q_\perp, q_\varepsilon, q_1, q_2, q_a\}, \mathcal{F}, \{q_\varepsilon\}, \Delta)$、ここで Δ は以下の規則からなる

$$
\begin{aligned}
&a \to q_a\\
&f(q_a, q_\perp) \to q_1\\
&g(q_\perp) \to q_2\\
&f(q_1, q_2) \to q_\varepsilon\\
&a \to q_\perp\\
&g(q_\perp) \to q_\perp\\
&f(q_\perp, q_\perp) \to q_\perp
\end{aligned}
$$

解答例 $A' = (Q, \mathcal{F}, Q^f, \Delta')$。ここで、

$Q = \{\{a, \perp\}, \{2, \perp\}, \{\perp\}, \{1, \perp\}, \{\varepsilon, \perp\}\}$
$Q^f = \{\{\varepsilon, \perp\}\}$

また、Δ' は以下の規則からなる

$a \to \{a, \perp\}$

g	
$\{a, \perp\}$	$\{2, \perp\}$
$\{2, \perp\}$	$\{2, \perp\}$
$\{\perp\}$	$\{2, \perp\}$
$\{1, \perp\}$	$\{2, \perp\}$
$\{\varepsilon, \perp\}$	$\{2, \perp\}$

f: (縦軸：第 1 引数、横軸：第 2 引数)

	$\{a, \perp\}$	$\{2, \perp\}$	$\{\perp\}$	$\{1, \perp\}$	$\{\varepsilon, \perp\}$
$\{a, \perp\}$	$\{1, \perp\}$	$\{1, \perp\}$	$\{1, \perp\}$	$\{1, \perp\}$	$\{1, \perp\}$
$\{2, \perp\}$	$\{\perp\}$	$\{\perp\}$	$\{\perp\}$	$\{\perp\}$	$\{\perp\}$
$\{\perp\}$	$\{\perp\}$	$\{\perp\}$	$\{\perp\}$	$\{\perp\}$	$\{\perp\}$
$\{1, \perp\}$	$\{\perp\}$	$\{\varepsilon, \perp\}$	$\{\perp\}$	$\{\perp\}$	$\{\perp\}$
$\{\varepsilon, \perp\}$	$\{\perp\}$	$\{\perp\}$	$\{\perp\}$	$\{\perp\}$	$\{\perp\}$

問 2 $\mathcal{F} = \{f(,), a, b\}$ とし、t 中の出現する記号 a の数を $|t|_a$ で表すとする。このとき、木言語 $L = \{t \in \mathrm{T}(\mathcal{F}) \mid |t|_a = |t|_b\}$ が正規木言語でないことを示せ。

解答例 記法 $f^i(s, t)$ $(i \geq 0)$ を以下のように定義する
$f^0(s, t) = s$
$f^{i+1}(s, t) = f(f^i(s, t), t) \quad (i \geq 0)$

L が正規木言語と仮定すると、反復補題が定める k が存在する。$t = f(f^m(a, a), f^m(b, b))$ $(m \geq k)$ を考えると、$|f^m(a, a)|_a = |f^m(b, b)|_b = m + 1$ より $t \in L$ であり、以下を満たす分割 $t = C[C'[u]]$ が存在する。

1. $C' \notin \mathcal{X}$
2. $\forall n \geq 0,\ C[C'^n[u]] \in L$

[$C \in \mathcal{X}$ のとき]: 一般性を失うことなく以下の場合分けが存在する。

(1) $C' = f(f^\ell(x_1, a), f^m(b, b))$、$u = f^{m-\ell}(a, a)$ $(0 \leq \ell \leq m)$

(2) $C' = f(f^\ell(f(f^{m-\ell-1}(a, a), x_1), a), f^m(b, b))$、$u = a$ $(0 \leq \ell < m)$

反復補題より $C[u] \in L$ であるが、いずれの場合も $C[u] = u \notin L$ であるため、矛盾する

[$C = f(f^\ell(x_1, a), f^m(b, b))$ $(0 \leq \ell < m)$ のとき]: 一般性を失うことなく以下の場合分けが存在する。

(1) $C' = f^{\ell'}(x_1, a)$、$u = f^{m-\ell-\ell'}(a, a)$ $(0 < \ell' \leq m - \ell)$

(2) $C' = f^{\ell'}(f(f^{m-\ell-\ell'-1}(a, a), x_1), a)$、$u = a$ $(0 \leq \ell' < m - \ell)$

$C' = f^{\ell'}(x_1)$、$u = g^{m-\ell-\ell'}(a)$ $(\ell' > 0)$ である。反復補題より $C[u] \in L$ であるが、(1) のとき $C[u] = f(f^{m-\ell'}(a, a), f^m(b, b)) \notin L$、(2) のとき $C[u] = f(f^\ell(a, a), f^m(b, b)) \notin L$ であるため、いずれの場合も矛盾する。