オートマトン・形式言語特論 レポート 1 解答例 2010.4.23 提出期限分

問 1 $\mathcal{F} = \{f(,), g(), a\}$ について、$L_1 = \{f(f(a,s), g(t)) \mid s, t \in \mathrm{T}(\mathcal{F})\}$ を認識する NFTA を示せ

解答例 $A = (\{q_\perp, q_\varepsilon, q_1, q_2, q_a\}, \mathcal{F}, \{q_\varepsilon\}, \Delta)$、ここで Δ は以下の規則からなる

$$
\begin{aligned}
& a \to q_a \\
& f(q_a, q_\perp) \to q_1 \\
& g(q_\perp) \to q_2 \\
& f(q_1, q_2) \to q_\varepsilon \\
& a \to q_\perp \\
& g(q_\perp) \to q_\perp \\
& f(q_\perp, q_\perp) \to q_\perp
\end{aligned}
$$

参考 [補題 1] 任意の $t \in \mathrm{T}(\mathcal{F})$ について、$t \to_A^* q_\perp$ である。

(証明) t の高さに関する帰納法。

$t = a$ のとき、$a \to q_\perp$ より明らか。

$t = g(t')$ のとき、帰納法の仮定より $t' \to_A^* q_\perp$。よって、$t = g(t') \to_A^* g(q_\perp) \to q_\perp$。

$t = f(t_1, t_2)$ のときも同様。

[補題 2] 任意の $u \in \mathrm{T}(\mathcal{F})$ について、以下が成り立つ。

1. $u \to_A^* q_a$ かつそのときに限り、$u = a$。
2. $u \to_A^* q_1$ かつそのときに限り、ある s が存在して $u = f(a, s)$。
3. $u \to_A^* q_2$ かつそのときに限り、ある t が存在して $u = g(t)$。
4. $u \to_A^* q_\varepsilon$ かつそのときに限り、ある s と t が存在して $u = f(f(a,s), g(t))$。

(証明) 3. のみ示す。他は省略。

($\Rightarrow$) $u \to_A^* q_2$ とするとき、最後のステップは $g(q_\perp) \to_A q_2$ しかない。したがって、ある t が存在して $u = g(t) \to_A^* g(q_\perp) \to_A q_2$ と書ける。

($\Leftarrow$) ある t について、$u = g(t)$ とする。このとき、補題 1 より、$t \to_A^* q_\perp$。よって、$u = g(t) \to_A^* g(q_\perp) \to_A q_2$。

問 2 $\mathcal{F} = \{f(,), a, b\}$ について、以下で定義される言語 L_2 を認識する NFTA を示せ

- $f(a, b) \in L_2$
- $t \in L_2$ ならば $f(a, f(t, b)) \in L_2$

解答例 $A = (\{q_\perp, q_f, q_2, q_a, q_b\}, \mathcal{F}, \{q_f\}, \Delta)$、ここで Δ は以下の規則からなる

$$
\begin{aligned}
& a \to q_a \\
& b \to q_b \\
& f(q_a, q_b) \to q_f \\
& f(q_f, q_b) \to q_2 \\
& f(q_a, q_2) \to q_f \\
& a \to q_\perp \\
& b \to q_\perp \\
& f(q_\perp, q_\perp) \to q_\perp
\end{aligned}
$$