線形時間命題論理 PLTL

- **PLTL (Propositional Linear-time Temporal Logic) の構文**
  - 原始式 : p (命題記号の有限集合 P の要素)
  - 式 : $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\neg$, U, N を使って原始式から作られる ($\phi U \psi$, $N\phi$の形式)

- **PLTLの意味**

  Pの要素をアルファベットとする文字列$w = p_1 \ldots p_n$に対して、wのもとでϕが成立する**(**$w \models \phi$**)**とは、

  - $w \models p$ **iff** $p_1 = p$
  - $w \models N\phi$ **iff** $2 \leq n$かつ$p_2 \ldots p_n \models \phi$
  - $w \models \phi U \psi$ **iff** 以下を満たす i **(**$1 \leq i \leq n$**)**が存在

    $p_i \ldots p_n \models \psi$かつ

    $1 \leq j < i$なるjについて$p_j \ldots p_n \models \phi$
  - $w \models \neg\phi$ **iff** $w \models \phi$が成立しない

    $\vdots$

- **PLTLの意味(続き)**
直観的には、$w = pp'p''$は、今pが、次の時間にp'が、その次にp''が成り立つ状況を表現する。よって、$N\phi$は次にϕが成り立つことを、$\phi U \psi$はψが成り立つまでϕが成り立つことを意味する。

- 例: $N(pUp')$で定められる言語$L = \{w \mid w \models N(pUp')\}$は、正規表現$Rp^*p'R^*$で表せる。ここで$R$は$P$の全ての要素を$+$でつないだ正規表現、すなわち、$P = \{p_1, \ldots, p_m\}$の場合には$R$は$(p_1 + \cdots + p_m)$
- 例： 次の正規表現を定める論理式は？
  - R^*pR^*: $true\,U p$ (いつかpが成り立つ)
    ($true$は、例えば$p \vee \neg p$で定義できる)
    しばしば$true\,U\phi$を$F\phi$と書く
  - pp^*: $\neg(F(\neg p))$ (ずっとpが成り立つ)
    しばしは$\neg(F(\neg\phi))$を$G\phi$と書く

- **PLTL 論理式の充足可能性問題:** 論理式 ϕ が与えられてそれを成り立たせる文字列 w が存在するかどうかという問題
- 定理：**PLTL** 論理式の充足可能性問題は決定可能
- 証明：
  - P の各々の要素 p に対して2階変数 X_p を用意し、文字列を以下の例のようにコーディングする

    $P = \{p, p'\}$ かつ $w = pp'p$ なら

    $\widehat{w} = (X_p, X_{p'})$ ここで $X_p = \{\varepsilon, 11\}$、$X_{p'} = \{1\}$

- 証明 (続き)
  - $w \models \phi$ **iff** $\widehat{w} \models \psi$を満たすように、**PLTL**論理式ϕから**WS1S**論理式ψを$T(\phi, \varepsilon)$で構成する
  - $T(p, x) : x \in X_p$
  - $T(N\phi, x) : T(\phi, x1)$
  - $T(\phi U \phi', x)$:

    $$\begin{aligned}&\exists y.(x \leq y \wedge T(\phi', y)\\ &\qquad \wedge \forall z.(x \leq z \wedge z1 \leq y \Rightarrow T(\phi, z)))\end{aligned}$$
  - $T(\neg\phi) : \neg T(\phi)$

    $\vdots$