論理・オートマトン・関係

- **1** 変数 x の論理式 ϕ は集合を表せる
  $w \in L$ **iff** $w \models \phi$
- 例 : $P(x)$ を x が整数かつ偶数のとき真となる論理式とする
  $2 \models P(x)$
  $P(x)$ は偶数の集合を表すとみなせる
- n 変数 $x_1, \ldots, x_n$ では n 項関係を表す
  $(w_1, \ldots, w_n) \in R$ **iff** $w_1, \ldots, w_n \models \phi$

- **(木)** オートマトンは文字列 **(木)** の関係を表せる
- 文字列の組 $(aba, \varepsilon, bbba)$ の文字列表現：

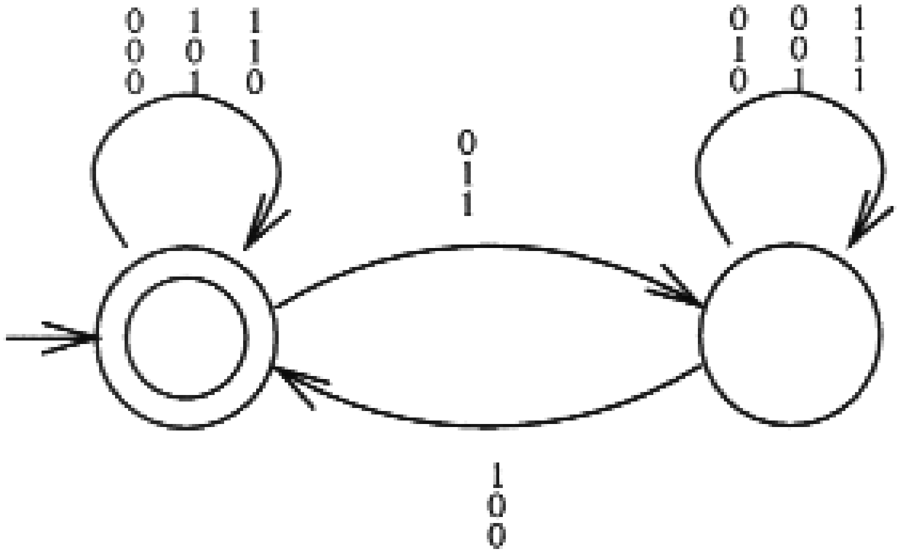
  $$[aba, \varepsilon, bbba] = \begin{matrix} a & b & a & \perp \\ \perp & \perp & \perp & \perp \\ b & b & b & a \end{matrix}$$

- 例：**2** 進数表現での加算の関係 R_+ を表すオートマトン
  - R_+ の定義

    $$(x^R, y^R, z^R) \in R_+ \textbf{ iff } x = y + z$$

  - $\left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}, \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}, \cdots, \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} \right\}$ をアルファベットする文字列を入力し関係 R_+ を認識するオートマトン

- 例の続き：



- 2進数で $1100 = 0101 + 0111$、したがって、

  $[0011, 1010, 1110] = \begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{matrix}$ は受理される

木オートマトンによる木上の２項関係のクラス

- クラス $\mathrm{Rec}_\times$：正規木言語 L_1,L_2 から定まる関係 $L_1 \times L_2$
  - $\Delta = \{(t,t) \mid t \in \mathrm{T}(\mathcal{F})\}$ は $\mathrm{Rec}_\times$ に属さない
- クラス Rec：正規木言語 L から定まる関係 $\{(t,u) \mid [t,u] \in L\}$
  - 木の組の木表現

$$
\begin{aligned}
&[f_1(t_1,\ldots,t_n), f_2(u_1,\ldots,u_m)] \\
&= f_1f_2([t_1,u_1],\ldots,[t_m,u_m], \\
&\qquad [t_{m+1},\perp],\ldots,[t_n,\perp]) \ (n \geq m\text{のとき})
\end{aligned}
$$

  - 例：$[f(g(a),g(a)), f(f(a,a),a)]$
    $= ff(gf(aa,\perp a), ga(a\perp))$

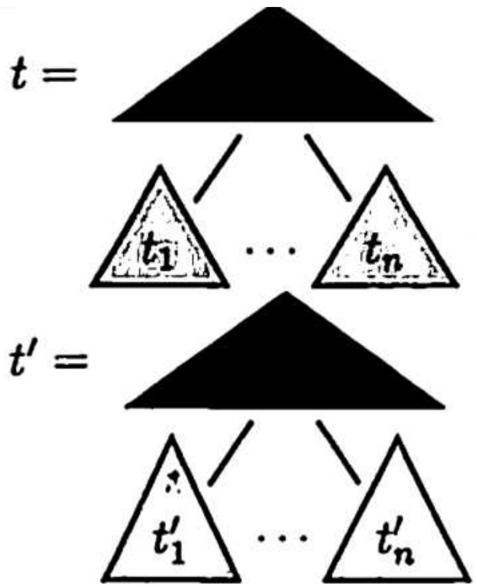
- クラスGTT：**NFTA**A_1,A_2から以下のように定まる関係R

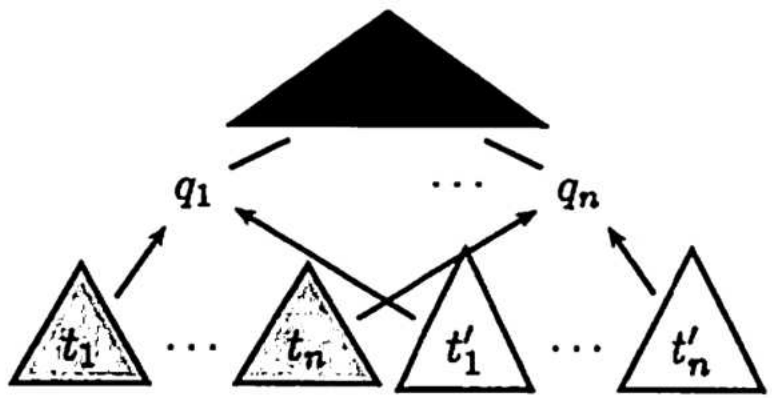
  $A_i = (Q_i, \mathcal{F}, \emptyset, \Delta_i)$とする

  $C[t_1, \ldots, t_n] \; R \; C[u_1, \ldots, u_n]) \iff$

  ある文脈Cと各$q_j \in Q_1 \cap Q_2$が存在して

  $t_j \rightarrow^*_{A_1} q_j$かつ$u_j \rightarrow^*_{A_2} q_j$





- Recが属する関係の例 R : $\mathcal{F} = \{a, \Omega, g(), f(,)\}$

  $tRu \overset{\text{def}}{\iff} u \in (\{t\} \cdot_\Omega \mathsf{T}(\mathcal{F}))$

  $[t, u]$ を受理する $Q^f = \{q'\}$ をもつ**NFTA** A

  $$\begin{array}{llll} aa \to q', & gg(q') \to q', & ff(q', q') \to q', & \\ \Omega a \to q', & \Omega g(q) \to q', & \Omega f(q, q) \to q', & \Omega\Omega \to q' \\ \perp a \to q, & \perp g(q) \to q, & \perp f(q, q) \to q, & \perp \Omega \to q \end{array}$$

  受理例 : $t = f(g(\Omega), g(\Omega))$, $u = f(g(g(a)), g(\Omega))$ のとき、

  $$\begin{aligned} [tu] &= ff(gg(\Omega g(\perp a)), gg(\Omega\Omega)) \\ &\to_A^* ff(gg(\Omega g(q)), gg(q')) \\ &\to_A^* ff(gg(q'), q') \\ &\to_A ff(q', q') \\ &\to_A q' \end{aligned}$$

- GTTが属する関係の例R^* : $\mathcal{F} = \{\times, +, 0, 1\}$

  $tRu \overset{\text{def}}{\iff} \exists C, t' \ t = C[0 \times t'] \wedge u = C[0]$

  R^*を定義するGTT(**NFTA**の組) A_1, A_2

  A_1: $\begin{array}{lll} 0 \to q & 0 \to q_0 & 1 \to q \\ q + q \to q & q \times q \to q & q_0 \times q \to q_0 \end{array}$

  A_2: $0 \to q_0$

  受理例 : $t = 1 + ((0 \times 1) \times 1$, $u = 1 + 0$のとき、

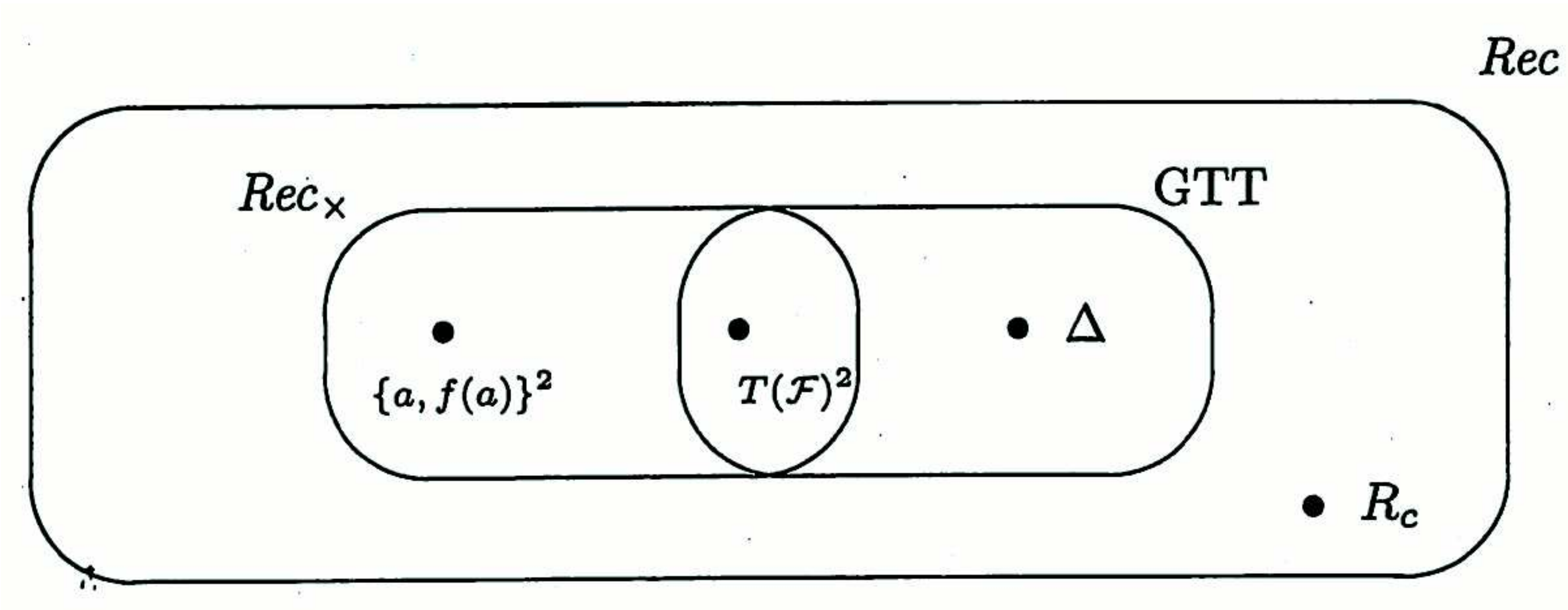
  $t \to_{A_1}^* 1 + ((q_0 \times q) \times q)$

  $\to_{A_1} 1 + (q_0 \times q)$

  $\to_{A_1} 1 + q_0$

  $u \to_{A_2} 1 + q_0$

- クラス間の関係



Recの閉包性

- **NFTA**の閉包性を受け継ぐ(和、積、など)
- 関係の射影：$R \subseteq R^n$ の i 番目の射影 $R_i \subseteq T^{n-1}$

  $R_i(t_1, \ldots, , t_{i-1}, t_{i+1}, \ldots, t_n)$

  $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \exists t \;\; R(t_1, \ldots, t_{i-1}, t, t_{i+1}, \ldots, t_n)$
- 例：$R = \{(a,a,a), (a,a,c), (a,b,c)\}$

  $R_2 = \{(a,a), (a,c)\}$
- 関係の円柱化：$R \subseteq R^n$ の i 番目の円柱化 $R^i \subseteq T^{n+1}$、

  $R^i(t_1, \ldots, t_{n+1})$

  $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad R(t_1, \ldots, t_{i-1}, t_{i+1}, \ldots, t_{n+1})$
- 例：$R = \{(a,a), (a,c)\} \subseteq \{a,b,c\}^2$

  $R^2 = \{(a,a,a), (a,b,a), (a,c,a), (a,a,c), (a,b,c), (a,c,c)\}$

- Recのクラスは、射影と円柱化ともに閉じている
- 証明：射影R_iは、Rから線形な木準同型写像hで与えられる。(arity$(f_1 \cdots f_n) = k \geq k' =$ arity$(f_1 \cdots f_{i-1} f_{i+1} \cdots f_n)$)

  $h_{\mathcal{F}}(f_1 \cdots f_n(x_1, \ldots, x_k))$
  $= f_1 \cdots f_{i-1} f_{i+1} \cdots f_n(x_1, \ldots, x_{k'})$

  円柱化R^iはhの逆像で与えられる

GTTの閉包性

- GTTのクラスは、推移閉包に閉じている
- 略証：**(**ε-規則の追加**)**

  A_1,A_2に共通な状態q, q'で

  $\exists t \ \ t \rightarrow^*_{A_1} q \wedge t \rightarrow^*_{A_2} q'$を満たすものについて

  $q \not\rightarrow^*_{A_2} q'$ならば$q \rightarrow q'$を$A_2$の規則に追加

  $q' \not\rightarrow^*_{A_1} q$ならば$q' \rightarrow q$を$A_1$の規則に追加

- 略証(続き)