NFTAと正規木表現

- 命題： **DFTA** $A = (Q, \mathcal{F}, Q^d, \Delta)$が認識する言語を表す正規木表現が存在する
- 証明: $Q = \{1, \ldots, n\}$とする
  - 状態の集合K ($\subseteq Q$)とし、木$t \in \mathrm{T}(\mathcal{F} \cup K)$のうちで$m$より大きな状態を経由しないで$t \to_A^* j$となる木全体を表す正規木表現を$R_{K,j}^{(m)}$で表す
  - 例：$\Delta : a \to 1, f(1,1) \to 2, f(1,2) \to 2$， $Q^f = \{2\}$

$$R_{\{1\},2}^{(0)} : \{f(1,1)\},$$

$$R_{\{1\},2}^{(1)} : R_{\{1\},2}^{(0)} \cup \{f(1,a), f(a,1), f(a,a)\},$$

$$R_{\{1\},2}^{(2)} : R_{\{1\},2}^{(1)} \cup \{f(1, f(1,1)), f(a, f(1,1)), f(1, f(a,1)), \ldots\}$$

- 証明(続き)：
  - 目的の正規木表現は $R^{(n)}_{\emptyset j}$ の和(ただし、j はすべての受理状態)で与えられる
  - $R^{(m)}_{K,j}$ の再帰的定義

    基底：($m = 0$)

    $a \to_A j$ を満たす a を $a_1, \ldots, a_p$、

    $t = f(q_1, \ldots, q_k) \to_A j$ ($q_i \in K$) を満たす t を $t_1, \ldots, t_\ell$ とする

    $j \in K$ のとき

    $$R^{(0)}_{K,j} = j + a_1 + \cdots + a_p + t_1 + \cdots + t_\ell$$

    $j \notin K$ のとき

    $$R^{(0)}_{K,j} = a_1 + \cdots + a_p + t_1 + \cdots + t_\ell$$

- 証明 (続き) :
  - $R_{K,j}^{(m)}$ の再帰的定義 (続き)

    帰納 : ($m > 0$)

    $$R_{K,j}^{(m)} =$$
    $$R_{S,j}^{(m-1)} + R_{K\cup\{m\},j}^{(m-1)} \cdot_m \left(R_{K\cup\{m\},m}^{(m-1)}\right)^{*,m} \cdot_m R_{K,m}^{(m-1)}$$

- 例：$\Delta : a \to 1, f(1,1) \to 2, f(1,2) \to 2$， $Q^f = \{2\}$
  - $R^{(0)}_{K,j}$ を求める

$j \backslash K$	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$
1	a	$1+a$	a	$1+a$
2	$\emptyset$	$f(1,1)$	2	$2+f(1,1)+f(1,2)$

  - $R^{(1)}_{K,j}$ を求める

$$R^{(1)}_{\emptyset,2} = R^{(0)}_{\emptyset,2} + R^{(0)}_{\{1\},2} \cdot_1 \left(R^{(0)}_{\{1\},1}\right)^{*,1} \cdot_1 R^{(0)}_{\emptyset,1}$$
$$= \emptyset + f(1,1) \cdot_1 (1+a)^{*,1} \cdot_1 a$$
$$= f(1,1) \cdot_1 (1+a) \cdot_1 a = f(a,a)$$
$$R^{(1)}_{\{2\},2} = R^{(0)}_{\{2\},2} + R^{(0)}_{\{1,2\},2} \cdot_1 \left(R^{(0)}_{\{1,2\},1}\right)^{*,1} \cdot_1 R^{(0)}_{\{2\},1}$$
$$= 2 + (2+f(1,1)+f(1,2)) \cdot_1 (1+a)^{*,1} \cdot_1 a$$
$$= 2 + (2+f(1,1)+f(1,2)) \cdot_1 (1+a) \cdot_1 a$$
$$= 2 + f(a,a) + f(a,2)$$

- 例 (続き) :
  - $R^{(1)}_{\emptyset,2} = f(a,a) \quad R^{(1)}_{\{2\},2} = 2 + f(a,a) + f(a,2)$
  - $R^{(2)}_{\emptyset,2}$ を求める

$$
\begin{aligned}
R^{(2)}_{\emptyset,2} &= R^{(1)}_{\emptyset,2} + R^{(1)}_{\{2\},2} \cdot_2 \left(R^{(1)}_{\{2\},2}\right)^{*,2} \cdot_2 R^{(1)}_{\emptyset,2} \\
&= f(a,a) + (2 + f(a,a) + f(a,2)) \\
&\qquad\qquad \cdot_2 (2 + f(a,a) + f(a,2))^{*,2} \cdot_2 f(a,a) \\
&= f(a,a) + (2 + f(a,a) + f(a,2))^{*,2} \cdot_2 f(a,a) \\
&\quad + f(a,2) \cdot_2 (2 + f(a,a) + f(a,2))^{*,2} \cdot_2 f(a,a) \\
&= f(a,a) + f(a,2)^{*,2} \cdot_2 f(a,a) \\
&\quad + f(a,2) \cdot_2 f(a,2)^{*,2} \cdot_2 f(a,a) \\
&= f(a,a) + f(a,2)^{*,2} \cdot_2 f(a,a) = f(a,2)^{*,2} \cdot_2 f(a,a)
\end{aligned}
$$

- 定理： 正規木言語のクラスは、正規木表現で表せる木言語のクラスと等しい
- 証明: **($\subseteq$):** 前補題より
  ($\supseteq$): 正規木表現の構成に関する帰納法による