オートマトン・形式言語特論

項と木

- ランク付関数記号の集合$\mathcal{F}$:
  関数記号の引数の数arity: $\mathcal{F} \rightarrow N$
  $\mathcal{F} = \{f(,), g(), a\}$
- 変数の集合$\mathcal{X}$　　特に$\mathcal{X}_n = \{x_1, \ldots, x_n\}$
- 項の集合$\mathrm{T}(\mathcal{F}, \mathcal{X})$: 以下を満たす最小の集合
  $x \in \mathrm{T}(\mathcal{F}, \mathcal{X})$ ... $x \in \mathcal{X}$
  $a \in \mathrm{T}(\mathcal{F}, \mathcal{X})$ ... $a \in \mathcal{F}$かつarity$(a) = 0$
  $f(t_1, \ldots, t_n) \in \mathrm{T}(\mathcal{F}, \mathcal{X})$
  ... $f \in \mathcal{F}$, arity$(f) = n$, 各$t_i \in \mathrm{T}(\mathcal{F}, \mathcal{X})$
  項の例：$f(g(a), a)$
- 基礎項の集合$\mathrm{T}(\mathcal{F})$: $\mathrm{T}(\mathcal{F}, \emptyset)$

- ラベル付木:

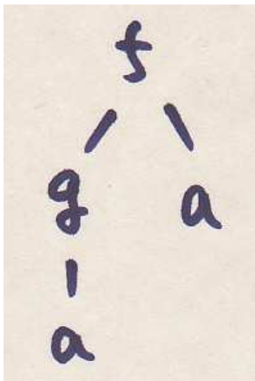
  部分関数 $t : N^* \to \mathcal{F} \cup \mathcal{X}$

  t の定義域を $\mathsf{Pos}(t)$ で表す

  \- $f(g(a), a)$ を表す木 t

  $\mathsf{Pos}(t) = \{\varepsilon, 1, 11, 2\}$

p	ε	1	11	2
$t(p)$	f	g	a	a



- 木 t の高さ: $|t| = \max\{|p| \mid p \in \mathsf{Pos}(t)\}$

- 代入: 関数$\sigma : \mathcal{X} \to \mathsf{T}(\mathcal{F}, \mathcal{X})$
  - 代入σの定義域: $\mathsf{Dom}(\sigma) = \{x \in \mathcal{X} \mid \sigma(x) \neq x\}$
  - 記法: $\mathsf{Dom}(\sigma) = \{x_1, \ldots, x_n\}$、$\sigma(x_i) = t_i$ のとき、σを$\{x_1 \leftarrow t_1, \ldots, x_n \leftarrow t_n\}$ と書く
  - 通常項上に拡張したものを考える

$$\sigma(f(t_1, \ldots, t_n)) = f(\sigma(t_1), \ldots, \sigma(t_n)) \quad (n \geq 0)$$

- 文脈: 線形項 $C \in \mathsf{T}(\mathcal{F}, \mathcal{X})$ (変数に重複がない)
  - 文脈がn個の変数を持つとき、以下では、変数は左から順に$x_1, \ldots, x_n$であるものとする。

    $C = f(g(x_1), x_2)$のとき、$C[a, g(b)] = f(g(a), g(b))$
  - n変数の文脈Cについて、$C[t_1, \ldots, t_n]$は、$C\{x_1 \leftarrow t_1, \ldots, x_n \leftarrow t_n\}$を表す。

有限木オートマトン

- **(ボトムアップ)非決定性有限木オートマトン(NFTA)**

  $A = (Q, \mathcal{F}, Q^f, \Delta)$

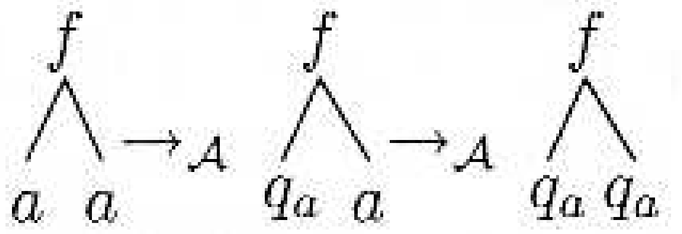
  - Q : 状態の有限集合
  - $\mathcal{F}$: 関数記号の集合
  - Q^f $(\subseteq Q)$: 最終状態の集合
  - Δ : 遷移規則の集合

  遷移規則は以下の形式

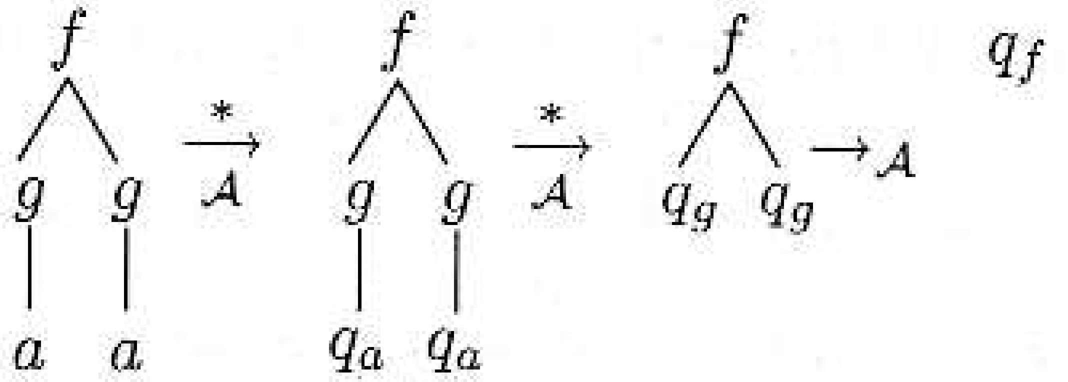
  $$f(q_1, \ldots, q_n) \to q$$

  ここで、$f \in \mathcal{F}$, arity$(f) = n$, $q, q_i \in Q$

- 例：$A = (\{q_a, q_g, q_f\}, \{a, g(), f(,)\}, \Delta, \{q_f\})$
  ここでΔは以下の要素からなる
  $a \to q_a$，$g(q_a) \to q_g$，$g(q_g) \to q_g$，$f(q_g, q_g) \to q_f$
  - $f(a, a)$に対する動作



  - $f(g(a), g(a))$に対する動作



- 遷移関係$\rightarrow_A$：以下を満たす最小の集合
  - $\Delta \subseteq \rightarrow_A$
  - $s \rightarrow_A t$ならば、$f(\cdots s \cdots) \rightarrow_A f(\cdots t \cdots)$
- $\rightarrow_A^*$： $\rightarrow_A$の反射、推移閉包
- Aがtを受理：

  $t \rightarrow_A^* q \in Q^f$
- Aが認識する言語：

  $L(A) = \{t \mid t \rightarrow_A^* q \in Q^f\}$
- 正規木言語： **NFTA**で認識できる言語

- 例：$A = (\{q, q_g, q_f\}, \{a, g(), f(,)\}, \Delta, \{q_f\})$

  $a \to q$，$g(q) \to q$，$g(q) \to q_g$，

  $g(q_g) \to q_f$，$f(q, q) \to q$

  - $g(g(f(g(a), a)))$に対する動作

    $g(g(f(g(a), a))) \to_A^* g(g(f(q_g, q)))$

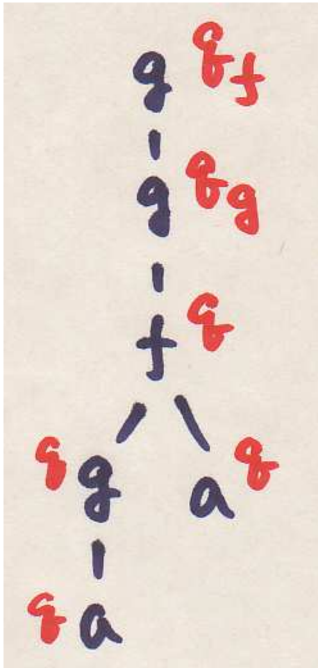
    $g(g(f(g(a), a))) \to_A^* g(g(q)) \to_A^* q$

    $g(g(f(g(a), a))) \to_A^* g(g(q)) \to_A^* q_f$

  - $L(A) = \{g(g(t)) \mid t \in \mathrm{T}(\mathcal{F})\}$

- 例 (続き) :
  - 動作の別表現

    Δ : $a \to q$， $g(q) \to q$， $g(q) \to q_g$， $g(q_g) \to q_f$， $f(q, q) \to q$



- 問**1:** $\mathcal{F} = \{f(,), g(), a\}$について、$L_1 = \{g(f(a, s)) \mid s \in \mathrm{T}(\mathcal{F})\}$を認識する**NFTA**を示せ
- 問**2:** $\mathcal{F} = \{f(,), a, b\}$について、以下で定義される言語$L_2$を認識する**NFTA**を示せ

  - $a \in L_2$

  - $s \in L_2$ならば$f(f(a, s), b) \in L_2$

- ε付-非決定性有限木オートマトン(**ε-NFTA**):
  以下の形式のε規則も許される **NFTA**
  $q \to q'$
- 決定性有限木オートマトン(**DFTA**):
  左辺が同じ規則を持たない**NFTA**
  (ε規則もない)
- 完全な**NFTA:**
  任意の変数を持たない項tについて、$\exists q.\ t \to_A^* q$

- 完全な**DFTA**の例：

$A = (\{q_0, q_1\}, \{0, 1, not(), and(,), or(,)\}, \Delta, \{q_1\})$

$0 \to q_0$, $1 \to q_1$, $not(q_0) \to q_1$, $not(q_1) \to q_0$,
$and(q_0, q_0) \to q_0$, $and(q_0, q_1) \to q_0$,
$and(q_1, q_0) \to q_0$, $and(q_1, q_1) \to q_1$,
$or(q_0, q_0) \to q_0$, $or(q_0, q_1) \to q_1$,
$or(q_1, q_0) \to q_1$, $or(q_1, q_1) \to q_1$

- $and(not(or(0, 1)), or(1, not(0)))$に対する動作