

Gauss の和を計算してみよう

営業内容に関するコメント

鈴木浩志

2012.2.17.

なんか、講義の準備に関する情報も付けないといけないらしいので、順に説明してみます。

内容の選定は成り行きです。最初に来た営業依頼のメールに、7回あれば Gauss の和だっていけるのでは？とか書いてあったので、正 5 角形を描いたり、正 17 角形の描き方を自分で考えてもらったりすると、かなり楽しそうな感じになるに違いないと思い浮かべて、そのままそれで行ってみようと引き受けました。

当初、全 7 話と言うことだったので、とりあえず大まかに 7 話分編成して見ました。私が講義の編成時に注意するのは、恐らく聞いたことがないと思われる項目が 7 個を越えないことです。妥当かどうかは知らないのですが、多くなればなるほどわかりにくくなるはずなので、なんとなく目安にしています。大学 1 年生のときの微積分担当の先生は、1 日に教えることはひとつに抑えたほうが良いと言っていたので、それと比べるとかなり負け気味です。

Gauss の和の導入には、複素平面と 1 の p 乗根と平方剰余記号と Gauss の和の定義式が必要ですが、どう考えても 7 個より大幅に多くなるので、定義の前に 2 回つぶして、複素平面や 1 の p 乗根や $\text{mod } p$ などに慣れてもらわないと、全員置いてきぼりになるに違いないとみて、第 3 話を Gauss の和の定義の回に決めました。

第 1 話の目的は、複素平面の導入です。タイトルの Gauss の和がまったく出てこないのもなんなので、 G_5 だけ出して、 G_5^2 を計算してもらうことにして、案内文を書きました。後日、教育実習の巡回に行つて実習生の研究授業を見たあと、高校 1 年生は、夏休みの段階でまだ概ね、三角関数をやっていないはずで、 \sin と \cos を入れると 7 個をこえることに

気づきました。おそらく1の5乗根が出てきたあたりで、力尽きそうな気がするのですが、教科書先読みして、sin と cos の記号に見覚えくらいは有るかもとか、高校の先生が後日うまく処理してくれるかもとか自分に言い訳をしながらそのままにいくことにしました。

第2話は、正17角形の作図です。自分で工夫して作図していただけることを期待して、平方根の作図の仕方は話さないことにしました。また、基準となる長さ1は、コンパスや定規が届くように選ぶとかいう小ネタにあわせて、定規が届かない2点を通る直線を、コンパスと定規を使って引いてみるという課題を思いついたのでさりげなくはさんで見ました。

第3話は、Gauss の和の定義です。2回分つぶして、かなり慣れてきているはずなので、平方剰余記号を定義して、Gauss の和を定義して、平方剰余記号の簡単な性質を述べて、2乗を計算して終わる普通な感じで進んでも大丈夫と推定しました。

第4話は、Gauss の和の2乗の値と、作図で調べた符号から、一般の値を予想した後で、実際に符号を決定する方法を大まかに予告する回です。

第5話の内容は、第1話で出てきた1の原始 p 乗根の方程式の既約性と、符号の決定に使う判定条件です。

第6話の内容は、符号の決定です。高木貞治著の初等整数論講義や代数的整数論等、数冊の証明を見比べて説明のしかたによっては、代数的整数論の方がわかりやすいかもということで、この証明に頼ることにしました。

第7話の内容は、その後の発展ということで、4べき剰余のときの公式の具体例です。

これで、営業内容第1案が完成した感じだったのですが、その後ずいぶんたってから連絡メールが来て、第5-7話だけ聞く人もいたので、後半は、前半と別な話にしてとか言われました。”Gauss の和は導入に3回かけないと全員置いてきぼりになるので無理でしょう”と心の中で突っ込みを入れつつも、案内は既に出してしまったのでやむをえないということで、あわてて編成替えをしました。

それでも、まったく別の話にすると後半だけ聞いた人は導入だけで終了するか難しすぎるかどちらかになってしまうはずなので、第2案では1-4話の復習を織り交ぜて、5話目から聞いても話がわかるようにしながら第1案の5,6話を営業することにしました。

改定第5話は、第1案の第5話と、第1話の復習と混ぜたものです。

改定第 6 話は、第 2-3 話の復習です。改定第 7 話は、第 1 案の第 6 話です。第 2 案では、その後の発展を書いた、第 1 案の第 7 話は取りやめることにしました。

これで、営業内容がほぼ決まったのですが、実際に営業してみると、第 2 話で、正 5 角形の作図に思ったよりも時間がかかったため、正 17 角形の説明は、第 3 話にはみ出しました。そのため、Gauss の和の 2 乗の計算は 4 話に先送りになりました。その影響で、作図により G_7 の符号を確かめて Gauss の和の符号を予想するくだりは省略しました。

さらに、第 6 話営業予定日に台風が来て、先送りになった拍子に 6, 7 話が最終日に 2 話連続営業ということになってしまいました。2 話連続だと 7 個制限を越えて、全員 7 話の冒頭あたりで力尽きそうな気がしたのですが、これはどうしようもないので、そのまま営業しました。予想通り、後半全員力尽きていくのが見て取れて、“ごめんなさいなのですよー”とか心の中で謝りつつも最後まで営業しました。

終了後の発表会では、皆様課題についていろいろ調べたり考えてくれたりしていたのでうれしかったです。考えたけどわからなかったと言っていた方もいたので、もうちょっとヒントを出しておいても良かったかとも思いました。その中で、愛知県立津島東高等学校の秋山大翼様の発表は、未完成ながらも正 17 角形の作図を自力で頑張っている感が良く出ていたため知の探究講座全体の発表会での発表者に推薦しました。

全体の発表会での発表は、未完成だった部分を完成してすごくいい感じの発表だったらしいので、見られなかったのが特に残念です。その後、一度、名古屋大学に秋山様が来られたことがあったのですが、他の仕事で閉じ込められていて、直接讚えることが出来なかったのもかなり惜しいことをした感じです。

その後ヒントとか書いた後、教員免許状更新講習で、同じ話を少し短めに営業してみたのですが、ヒントつきでも正 17 角形を描くのは、かなり大変そうだったので、描画手順の例も追加してみました。