平成22年度　エV系(社会環境工学科)　第4回　電磁気学Ⅰ

天野　浩

項目

クーロンの法則と静電界

＊荷電した粒子同士に働くクーロン力、クーロンの法則の発見、定式化及び実際の解析法について学びます。
＊関数電卓を持参すること。

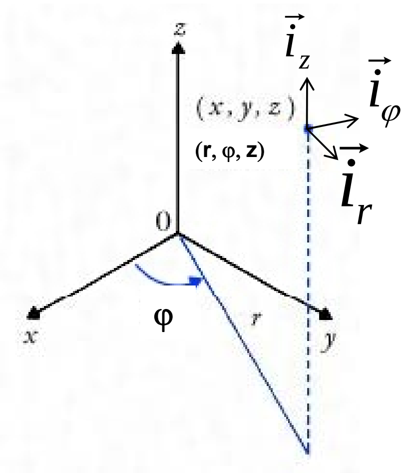
本日の計算に必要な物理量

真空の誘電率：　$\varepsilon_0 = 8.854\times 10^{-19}$[F/m]
電子の素電荷：$q = 1.602\times 10^{-19}$[C]

	直交座標	円筒座標	極座標
$\nabla\phi$	$\frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{k}$	$\frac{\partial\phi}{\partial r}\vec{i}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\vec{i}_\varphi+\frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{i}_z$	$\frac{\partial\phi}{\partial r}\vec{i}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\vec{i}_\theta+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\vec{i}_\varphi$
$\nabla\cdot\vec{A}$	$\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2A_r)}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta A_\theta)}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}$
$\nabla\times\vec{A}$	$\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{k}$	$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\varphi}-\frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)\vec{i}_r+\left(\frac{\partial A_r}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{i}_\varphi+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}\right)\vec{i}_z$	$\frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial(\sin\theta A_\varphi)}{\partial\theta}-\frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right)\vec{i}_r+\frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}-\frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r}\right)\vec{i}_\theta+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r}-\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\vec{i}_z$

xyzの直交(デカルト)座標系から円筒(円柱)座標系、極座標系への変換により求める方法

円筒座標系の例 $\nabla\phi$



$$x = r\cdot\cos\varphi \qquad r=\sqrt{x^2+y^2} \qquad \vec{i}_x=\vec{i}_r\cos\varphi-\vec{i}_\varphi\sin\varphi$$

$$y = r\cdot\sin\varphi \qquad \varphi=\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \qquad \vec{i}_y=\vec{i}_r\sin\varphi+\vec{i}_\varphi\cos\varphi$$

$$z=z \qquad z=z \qquad \vec{i}_z=\vec{i}_z$$

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial r}\cos\varphi-\frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{1}{r}\sin\varphi$$

$$\frac{\partial}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial r}\sin\varphi+\frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{1}{r}\cos\varphi$$

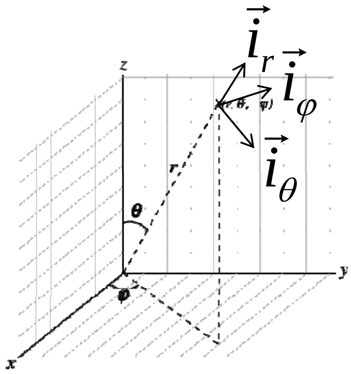
$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\nabla=\vec{i}_x\frac{\partial}{\partial x}+\vec{i}_y\frac{\partial}{\partial y}+\vec{i}_z\frac{\partial}{\partial z}$$

$$=(\vec{i}_r\cos\varphi-\vec{i}_\varphi\sin\varphi)\left(\frac{\partial}{\partial r}\cos\varphi-\frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{1}{r}\sin\varphi\right)+(\vec{i}_r\sin\varphi+\vec{i}_\varphi\cos\varphi)\left(\frac{\partial}{\partial r}\sin\varphi+\frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{1}{r}\cos\varphi\right)+\vec{i}_z\frac{\partial}{\partial z}$$

$$=\vec{i}_r\frac{\partial}{\partial r}+\vec{i}_\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{1}{r}+\vec{i}_z\frac{\partial}{\partial z}$$

極座標系の例　$\nabla\phi$



$$x = r\cdot\sin\theta\cdot\cos\varphi$$
$$y = r\cdot\sin\theta\cdot\sin\varphi$$
$$z = r\cdot\cos\theta$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right)$$
$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\vec{i}_x = \vec{i}_r\sin\theta\cos\varphi + \vec{i}_\theta\cos\theta\cos\varphi - \vec{i}_\varphi\sin\varphi$$
$$\vec{i}_y = \vec{i}_r\sin\theta\sin\varphi + \vec{i}_\theta\cos\theta\sin\varphi + \vec{i}_\varphi\cos\varphi$$
$$\vec{i}_z = \vec{i}_r\cos\theta - \vec{i}_\theta\sin\theta$$

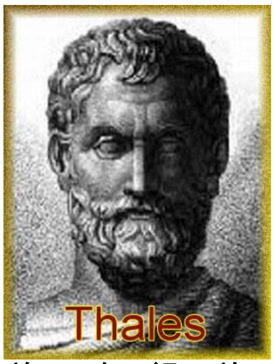
$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial r}\sin\theta\cos\varphi + \frac{\partial}{\partial\theta}\frac{1}{\mathrm{r}}\cos\theta\cos\varphi - \frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{1}{r}\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}$$
$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial r}\sin\theta\sin\varphi + \frac{\partial}{\partial\theta}\frac{1}{\mathrm{r}}\cos\theta\sin\varphi + \frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{1}{r}\frac{\cos\varphi}{\sin\theta}$$
$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial}{\partial\theta}\frac{1}{r}\sin\theta$$

$$\nabla = \vec{i}_x\frac{\partial}{\partial x} + \vec{i}_y\frac{\partial}{\partial y} + \vec{i}_z\frac{\partial}{\partial z}$$
$$= (\vec{i}_r\sin\theta\cos\varphi + \vec{i}_\theta\cos\theta\cos\varphi - \vec{i}_\varphi\sin\varphi)\left(\frac{\partial}{\partial r}\sin\theta\cos\varphi + \frac{\partial}{\partial\theta}\frac{1}{\mathrm{r}}\cos\theta\cos\varphi - \frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{1}{r}\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}\right)$$
$$+ (\vec{i}_r\sin\theta\sin\varphi + \vec{i}_\theta\cos\theta\sin\varphi + \vec{i}_\varphi\cos\varphi)\left(\frac{\partial}{\partial r}\sin\theta\sin\varphi + \frac{\partial}{\partial\theta}\frac{1}{\mathrm{r}}\cos\theta\sin\varphi + \frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{1}{r}\frac{\cos\varphi}{\sin\theta}\right)$$
$$+ (\vec{i}_r\cos\theta - \vec{i}_\theta\sin\theta)\left(\frac{\partial}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial}{\partial\theta}\frac{1}{r}\sin\theta\right)$$
$$= \vec{i}_r\frac{\partial}{\partial r} + \vec{i}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \vec{i}_\varphi\frac{1}{r}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

人はいつごろから電気や磁気に気づいたか？

琥珀＝Electron
(ギリシャ語)

http://blogs.yahoo.co.jp/uranai_karin/55229006.html



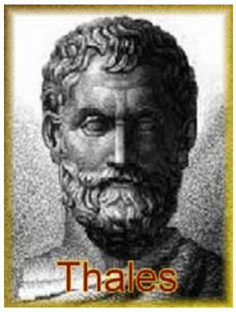
タレス（紀元前624年- 紀元前546年頃）
古代ギリシアの哲学者。

http://blog.goo.ne.jp/motoyama_2006/c/d214ae31268df781318995f9e08d1710

＊紀元前600年ころ、タレスにより、琥珀を羊皮などで擦った後に琥珀がほこりなどを吸い寄せたことに気づいた記述がある。→摩擦帯電発見の起源。

＊摩擦帯電とは、静電気現象の一種で、異なる二種の物質を擦り合わせることで、一方から他方へ電荷（多くの場合、電子）が移動して電位差生じる現象である。電位差が生じるのは、物質同士が接触するとそれぞれの仕事関数の差によって物質間で電子が移動することが主要な要因であり、摩擦には接触面積を広げる効果がある。

人はいつごろから電気や磁気に気づいたか?



マグネタイト magnetite(磁鉄鉱)
[酸化鉱物] 成分:$Fe^{2+}Fe^{3+}{}_2O_4$

名前の由来は、磁鉄鉱が多く産出したマケドニアの地名「マグネシア」に由来している説と、この鉱物を発見した伝説上の羊飼い「マグネス」の名にちなんだという説がある。マグネットは、タレスが紀元前6世紀ごろ命名。

http://ruya.blog.so-net.ne.jp/2008-12-24

<u>紀元前240年～20年頃:</u> 慈石と司南および羅盤

中国の古文書「呂氏春秋」によると、西欧のマグネットと同じ頃、すでに中国でもこのような鉱石が当時の**慈州**にあり、且つ母親の二つの乳房のように**慈愛深く**乳児をひきつけることから**“慈石”**と書かれていた。二つの乳房とは、N極、S極のこと。

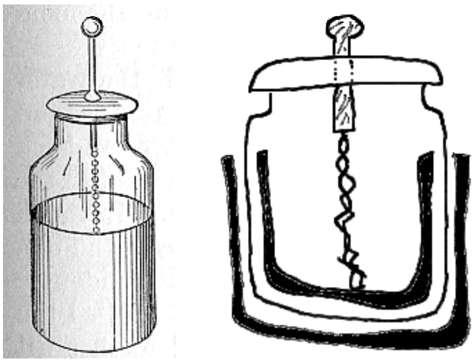
中国の方位磁石 指南(司南)
紀元前200年ころ

http://ja.wikipedia.org/wiki/%E5%BC%8F%E5%8D%A0

電荷を溜める道具の発明

1746年、オランダのピーター・ヴァン・マッシェンブレーケによって発明されたとされるが、このような器具で静電気を溜めることができることは、その3ヶ月前にドイツの牧師エヴァルト・ゲオルク・フォン・クライストが発見している。オランダのライデン大学発明されたため、「ライデン瓶」の名がある。ベンジャミン・フランクリンの凧揚げの実験にも使われた。

ガラス瓶の内側と外側を金属でコーティングしたもので、内側のコーティングは金属製の鎖を通して終端が金属球となっているロッドに接続される。初期は水が用いられたが、一般には電極とプレートで構成され、これらが絶縁体、例えばガラスによって切り離され、そこに電圧をかけると電荷が溜まる。コンデンサと同じ。



http://www.geocities.jp/kimujun59/old/btr_note_04.html

http://mydritt.blog28.fc2.com/blog-entry-3.html

感電死した人もいますので、実験の際には気をつけてください。

人はいつごろ正と負の電荷に気づいたか?

1733年、二種電気説を提唱。摩擦の実験を続けるうちに2種類の電気があることに気づく。封蝋を摩擦した場合の電気とガラスを摩擦した場合の電気であり、前者を樹脂電気、後者をガラス電気と命名

Charles François du Fay
1698-1739、 France

http://www.sparkmuseum.com/BOOK_DUFAY.HTM

1750年ころ、デュフェーの提唱したガラス電気を「正電気」、樹脂電気を「負電気」と呼んだ。

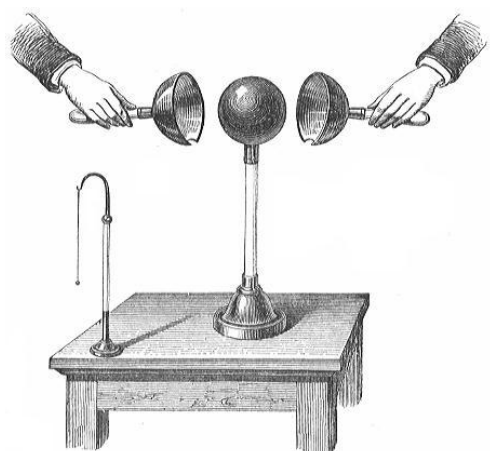
Benjamin Franklin,
1706-1790、USA

http://www.kanazawa-it.ac.jp/dawn/175101.html

クーロンの前にクーロンの法則を導き出した人

1773 **Henry Cavendish**
(1731～1810, UK)

ウィキペディアより



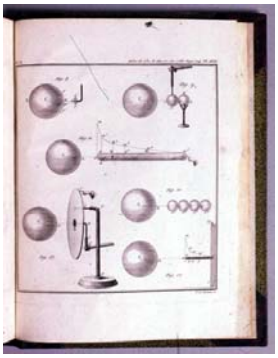
導体球

ウィキペディアより

ケンブリッジ大学
キャベンディッシュ研究所

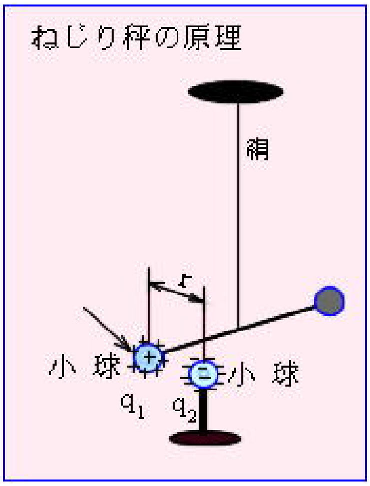
http://www.tebahima.com/neo-ganot/chap_08staticalelectricity/251SphereOfCoulomb251.html

クーロン力の名前の起源
距離の逆二乗則 → 定式化のための実験



1785 **Charles Augustine de Coulomb**(1736-1806, France)

http://www15.wind.ne.jp/~Glauben_leben/Buturi/History5.htm

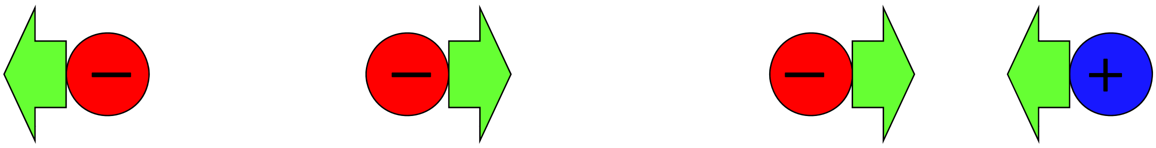


http://www.monominami.jp/denkijiki.html

クーロンの法則

静止した二つの点電荷Q_1とQ_2の間に働く力Fは、それらを結ぶ直線方向に生じ、その大きさは電荷の積に比例し、距離rの2乗に反比例する。

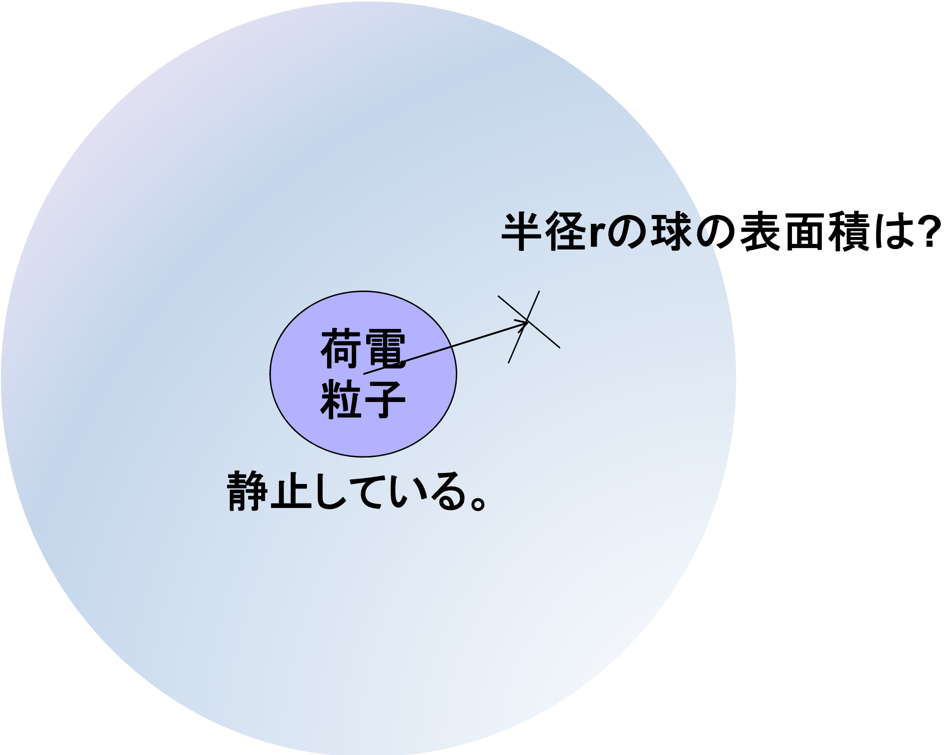
クーロン力の方向



同種電荷は反発する方向
斥力

異種電荷は引きつけるする方向
引力

クーロンの法則　なぜ距離rの2乗に反比例するのか？



クーロンの法則

電荷Qと電荷q の間にはクーロン力が働く。Qとqの距離をrとすると,
その大きさは

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{|Q||q|}{r^2}[N]$$

ε :電荷の周りの誘電率
N: 力の単位　ニュートン=[kg・m/s^2]

真空の誘電率　　$\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$　[F/m]

$\frac{1}{4\pi\varepsilon}$ という係数は，キャベンディッシュ，クーロンが見出したもの。

$\frac{1}{4\pi r^2}$ は，どちらかの点電荷を中心とした球の表面積より，単位面積当たりとした場合。

Q4-1　真空中に1[m]離れて10^{-6}[C]の電荷と10^{-7}[C]の電荷がある。両電荷間に働く力を求めなさい。

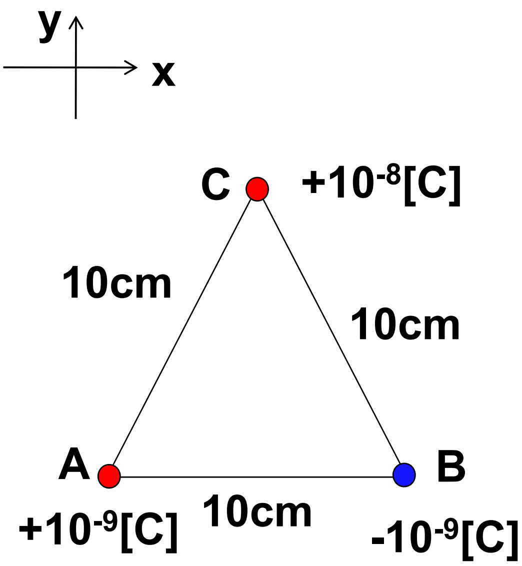
Q4-2　真空中，2つの同じ大きさの小さい導体球が10[cm]離れて置かれている。それぞれに電荷が1.7×10^{-9}[C]，-3.3×10^{-9}[C]とするとき，

(a)両球の間に働く力を求めなさい。

(b)導体球の大きさに比べて十分細い導線で両球を接続したとき，両球に働く力はどうなるか？

Q4-2　真空中，2つの同じ大きさの小さい導体球が10[cm]離れて置かれている。それぞれに電荷が1.7×10^{-9}[C]，-3.3×10^{-9}[C]とするとき，
(a)両球の間に働く力を求めなさい。
(b)導体球の大きさに比べて十分細い針金で両球を接続したとき，両球に働く力はどうなるか？

Q4-3　下図のように真空中のA,B,Cにそれぞれ点電荷を配置した時，Cでのクーロン力の方向と大きさを求めなさい。



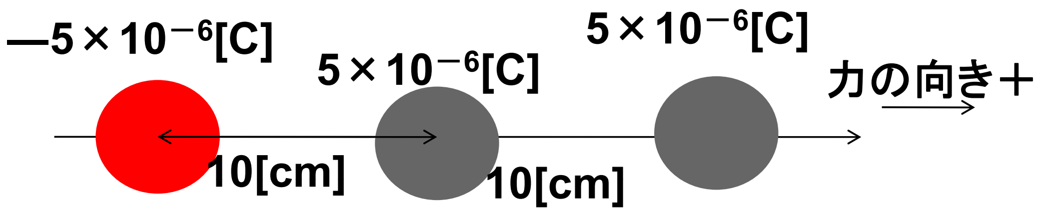
Q4-4　真空中に1[m]離れて相等しい電荷がある。その間に次のような力が働く場合，電荷の大きさは何クーロンか？

(a)1[N]

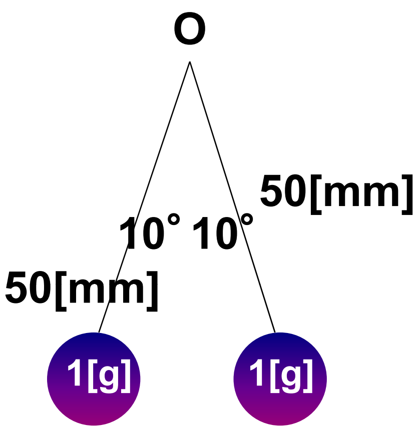
(b)　1[kg]の質量に働く重力に等しい力

Q4-5　電子と陽子が10^{-8}[cm]離れているとして，両者間に働く力を求めよ。

Q4-6　真空中で一直線上に間隔10[cm]隔てて，5×10^{-6}[C]，5×10^{-6}[C]，-5×10^{-6}[C]の電荷が存在する。 それぞれの電荷に働く力を求めなさい。



Q4-7　質量m=1[g]，電荷Qの小さな物体2個を，それぞれ長さa=50[mm]の絶縁糸で同一の点Oからつるしたとき，糸の鉛直に対する傾きが10°になった。このときのQはいくつか？



本日のまとめ

- クーロンの法則として理解できたことをまとめなさい。