第 9 回　重回帰モデル：統計的推測(1)

[1] 一つの係数の仮説検定

（例） $\log(wage) = \beta_0 + \beta_1 educ + \beta_2 exper + \beta_3 tenure + u$ ・・・①

（ 仮説の例 ） $\beta_2 = 0$

（仮説の意味）educ と tenure を一定とすれば，exper は log(wage)に影響しない。

（ 仮説検定 ）標本の特徴（回帰分析の結果）から $\beta_2 = 0$ といってよいか？

<u>検定統計量の作成</u>

係数β_jの仮説検定をするため，最小二乗推定量$\hat{\beta}_j$の分布を求め，検定統計量を作る。このため，誤差項 u について次の仮定をおく。

(M6)　$u \sim N(0, \sigma^2)$

定理 4.1（最小二乗推定量の分布(1)）

仮定(M1)～(M6)が成り立つとき，　$\hat{\beta}_j \sim N(\beta_j, Var(\hat{\beta}_j))$

（証明の概要）次の点に注意すれば，$\hat{\beta}_j$ は正規分布にしたがうことがわかる。

・$\hat{\beta}_j$は線形推定量　⇒　$\hat{\beta}_j = \sum_{i=1}^{n} w_{ji} y_i$　（w_{ji}は説明変数の関数）

・仮定(M2)，(M6)　⇒　$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \cdots + \beta_k x_{ki} + u_i$ は正規分布にしたがう。

・$y_1, \cdots, y_n$ が正規分布にしたがう　⇒　$\sum_{i=1}^{n} w_i y_i$ も正規分布にしたがう。

また，定理 3.1 と定理 3.2 より，仮定(M1)～(M5)が成り立てば，$\hat{\beta}_j$の平均と分散は

$$E(\hat{\beta}_j) = \beta_j, \qquad Var(\hat{\beta}_j) = \frac{\sigma^2}{S_{jj}(1 - R_j^2)} \quad ・・・ ②$$

定理 4.1 は次の関係を意味する。

$$Z = \frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{\sqrt{\mathrm{Var}(\hat{\beta}_j)}} \sim N(0, 1) \quad \cdot\cdot\cdot \quad ③$$

②より 未知の定数 σ^2 を含む ⇒ そのままでは検定に使えない

そこで，仮定(M1)～(M6)の下では，さらに次の関係が成り立つことを利用する。

・$V = \dfrac{(n-k-1)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-k-1)$ （$\hat{\sigma}^2$ は定理 3.3 で定義した σ^2 の不偏推定量）

・Z と V は独立である。

よって，t 分布の定義を使い，$T = \dfrac{Z}{\sqrt{V/(n-k-1)}} = \dfrac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{se(\hat{\beta}_j)}$ に注意すれば，

定理 4.2（最小二乗推定量の分布(2)）

仮定(M1)～(M6)が成り立てば，

$$T = \frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{se(\hat{\beta}_j)} \sim t(n-k-1)$$ （n：標本の大きさ，k：説明変数の数）

ここで，$se(\hat{\beta}_j) = \sqrt{\dfrac{\hat{\sigma}^2}{S_{jj}(1-R_j^2)}}$ は $\hat{\beta}_j$ の標準誤差である。

仮説検定の方法

(1) 片側検定（経済理論や常識からの事前情報がある場合）

（有意水準 α で帰無仮説 $\beta_j = 0$ を検定するときの棄却域）

1) 対立仮説：$\beta_j > 0$ ⇒ $T > c$ （c：t 分布の臨界値）

2) 対立仮説：$\beta_j < 0$ ⇒ $T < -c$ （$c > 0$）

（例）①式で，仮説 H_0 ： $\beta_2 = 0$ を仮説 H_1 ： $\beta_2 > 0$ に対して有意水準 5%で検定する。

$$\log(\text{wage}) = \underset{(0.104)}{0.284} + \underset{(0.007)}{0.092}\,\text{educ} + \underset{(0.0017)}{0.0041}\,\text{exper} + \underset{(0.003)}{0.022}\,\text{tenure}, \qquad n = 26$$

（括弧内は標準誤差）

・帰無仮説 H_0 が正しい　⇒　$T = \dfrac{\hat{\beta}_2}{se(\hat{\beta}_2)} \sim t(22)$

・対立仮説 H_1 ： $\beta_2 > 0$
　有意水準：5%
⟹
棄却域は t(22)の右側
臨界値は t(22)の上側面積が 0.05 のところ（1.717）

・検定統計量の値　$T = \dfrac{0.0041}{0.0017} = 2.41$　は棄却域に入る

（結論）仮説 H_0 は有意水準 5%で棄却される。

(2) 両側検定（事前情報がない場合）

（有意水準 α で帰無仮説 $\beta_j = 0$ を検定するときの棄却域）

対立仮説： $\beta_j \neq 0$　⇒　$|T| > c$　　（c：t 分布の臨界値）

（例）①式で，仮説 H_0 ： $\beta_3 = 0$ を仮説 H_1 ： $\beta_3 \neq 0$ に対して有意水準 5%で検定する。

・帰無仮説 H_0 が正しい　⇒　$T = \dfrac{\hat{\beta}_3}{se(\hat{\beta}_3)} \sim t(22)$

・対立仮説 H_1 ： $\beta_3 \neq 0$
　有意水準：5%
⟹
棄却域は t(22)の両側
臨界値は t(22)の上側面積が 0.025 のところ（2.074）

・検定統計量の値　$T = \dfrac{0.022}{0.003} = 7.33$　は棄却域に入る

（結論） H_0 は有意水準 5%で棄却される。

※ 帰無仮説 $\beta_j = 0$ を対立仮説 $\beta_j \neq 0$ に対して検定するとき，次のようにいう。

帰無仮説が棄却される（されない）⇒ β_j は統計的に有意である（ではない）

(3) より一般的な t 検定（帰無仮説が $\beta_j = a\ (\neq 0)$ のとき）

（例）大気汚染が住宅価格に与える影響を計測するため，④式を推定し，$H_0 : \beta_1 = -1$ を $H_1 : \beta_1 \neq -1$ に対して有意水準 5%で検定する。

$$\log(\text{price}) = \beta_0 + \beta_1 \log(\text{nox}) + \beta_2 \log(\text{dist}) + \beta_3 \text{rooms} + \beta_4 \text{stratio} + u \quad \cdot\cdot\cdot \quad ④$$

price：町の平均住宅価格，nox：町の窒素酸化物の量，dist：その町と中心都市の距離

rooms：町の住宅の平均部屋数，stratio：町の学校の生徒・教員比率の平均

（仮説 H_0 の意味）窒素酸化物の量が 1%ふえるとき，平均住宅価格は 1%下がる。

※ $\dfrac{\partial \log y}{\partial \log x}$ は弾力性（x が 1%ふえるとき，y は何%変化するか）

（推定結果：標本の大きさ n = 30）

$$\underset{(0.32)}{\log(\text{price}) = 11.08} - \underset{(0.117)}{0.954} \log(\text{nox}) - \underset{(0.043)}{0.134} \log(\text{dist}) + \underset{(0.019)}{0.255} \text{ rooms} - \underset{(0.006)}{0.052} \text{ stratio}$$

・帰無仮説 H_0 が正しい　⇒　$T = \dfrac{\hat{\beta}_1 + 1}{se(\hat{\beta}_1)} \sim t(25)$

・対立仮説 $H_1 : \beta_1 \neq -1$ 　有意水準：5%　⇨　棄却域は t(25)の両側　臨界値は t(25)の上側面積が 0.025 のところ（2.060）

・検定統計量の値 $T = \dfrac{-0.954 + 1}{0.117} = 0.393$ は棄却域に入らない。

（結論）H_0 は有意水準 5%で棄却されない。
（β_1 は有意水準 5%で -1 と統計的に変わらない）

＜p.1とp.3の例＞

Jeffrey Wooldridge

Introductory Econometrics: A Modern Approach (3rd ed.)

South-Western, Division of Thomson Learning

のp.131**の**EXAMPLE 4.1**を一部変更して利用**

＜p.4の例＞

Jeffrey Wooldridge

Introductory Econometrics: A Modern Approach (3rd ed.)

South-Western, Division of Thomson Learning

のp.139のEXAMPLE 4.5を一部変更して利用