第８回　仮説検定の考え方の復習

[1] 計量経済学でよく利用する確率分布

(1) 平均 μ，分散 σ^2 の正規分布にしたがう確率変数 X（$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ と書く）

$$X \text{の密度関数：} f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right), \quad -\infty < x < \infty$$

密度関数の形：　平均 μ を中心として，左右対称なベル型

確率の計算　：　標準正規分布（$\mu = 0$，$\sigma^2 = 1$ のとき）の表を利用する。

(2) 自由度 n のカイ二乗分布（$X \sim \chi^2(n)$ と書く，χ^2 分布表を利用）

n 個の独立な確率変数 $Z_1, \cdots, Z_n$ が標準正規分布にしたがうとき，$X = \sum_{i=1}^{n} Z_i^2 \sim \chi^2(n)$

(3) 自由度 n の t 分布（$T \sim t(n)$ と書く，t 分布表を利用）

$Z \sim N(0, 1)$，$V \sim \chi^2(n)$ であり，Z と V が独立のとき，$T = \dfrac{Z}{\sqrt{V/n}} \sim t(n)$

（例）$T \sim t(20)$ のとき，① $P(T \geq c) = 0.01$，② $P(T \leq c) = 0.01$，③ $P(|T| \leq c) = 0.90$
となる c をそれぞれ求めなさい。

(4) 自由度 k_1 と k_2 の F 分布（$F \sim F(k_1, k_2)$ と書く，F 分布表を利用）

$X_1 \sim \chi^2(k_1)$，$X_2 \sim \chi^2(k_2)$ であり，X_1 と X_2 は独立であるとき，$F = \dfrac{X_1/k_1}{X_2/k_2}$
$\sim F(k_1, k_2)$ である。

[2] 仮説検定

(1) 仮説と仮説検定

（例）ある試験の問題を，対象となる全学生について平均 70 点になるように作りたい。
この問題を 25 人の学生に解いてもらうと，標本平均は 76, 標本分散は 100 だった。
目的は達成できたといえるか？

母集団：学生全員の試験の点数　　　標本：学生 25 人の試験の点数

（母集団の特徴）　　　　　　（標本の特徴）

平均 μ　　　　　　標本平均 $\overline{X} = 76$，　標本分散 $s^2 = 100$

「目的は達成できたか」＝ 標本の特徴から，$\mu = 70$ といってよいか？

仮説検定： 標本の特徴にもとづき，**仮説** $\mu = 70$ が正しいかどうかを調べる。

仮説が正しくないとき，その仮説は「**棄却される**」という。

(2) 帰無仮説と対立仮説

帰無仮説：正しいと仮定し，検定する仮説（母集団の特徴を使って等式で表現）

対立仮説：帰無仮説を否定する仮説

（例の続き）帰無仮説と対立仮説は次のように設定される。

帰無仮説　：$\mu = 70$

対立仮説①：$\mu < 70$（試験が難しいと予想するとき）

対立仮説②：$\mu > 70$（試験が易しいと予想するとき）

} **片側検定**

対立仮説③：$\mu \neq 70$（特にどちらでもないとき）　　**両側検定**

※ 対立仮説は<u>標本の情報を知る前に</u>決めなければならない。

(3) **検定統計量**：興味のある母集団の特徴を含み，分布がわかっている確率変数。
この確率変数の分布を使って仮説検定をする。

（例の続き）興味のある母集団の特徴（試験の平均点 μ）の推定量である標本平均 $\overline{X}$ を基礎にして μ を含む検定統計量を作る。母集団の試験の点数が正規分布に従っており，この母集団から 25 人分の点数 X_i をランダムに選ぶとすれば

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{s/\sqrt{25}} \sim t(24), \qquad s = \sqrt{\frac{1}{24}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}$$

(4) **有意水準**：帰無仮説が正しいとき，帰無仮説を棄却する確率（第 I 種の誤りの確率）
（母集団の一部を標本としてとるため，本当は $\mu = 70$ だとしても，ときには誤って帰無仮説を棄却してしまうことがありうる）

有意水準は小さい方がよいが，小さくしすぎると，第 II 種の誤り（帰無仮説が正しくないとき，帰無仮説を棄却しない）の確率を大きくするため，5%か 1%に設定する。

(5) 棄却域と臨界値

棄却域：帰無仮説が正しいとするときの検定統計量の分布で，帰無仮説を棄却する領域

仮説検定では，とりあえず帰無仮説が正しいと仮定するため，

棄却域の面積 ＝ 有意水準（帰無仮説が正しいのにそれを棄却する確率）

臨界値：棄却域の境界を表す検定統計量の値

（例の続き）帰無仮説 $\mu = 70$ が正しいとき，検定統計量は $T = \dfrac{\overline{X} - 70}{s/\sqrt{25}} \sim t(24)$ となる。

このTの分布を利用するとともに，次の点を考慮して棄却域を作る。

・棄却域は，帰無仮説が正しいと仮定したにもかかわらず，対立仮説が正しいと考えられる部分を表す。

・帰無仮説が正しいかどうかに関係なく，$\overline{X}$ は μ に近いはずである。
（$\overline{X}$ は μ の不偏推定量）

・$s/\sqrt{25}$ はつねに正なので，T の符号は $\overline{X} - 70$ の符号と同じである。

対立仮説	$\overline{X}$	T	棄却域
① $\mu < 70$	70 より小さい	0 より小さい	t 分布の左端
② $\mu > 70$	70 より大きい	0 より大きい	t 分布の右端
③ $\mu \neq 70$	70 から離れる	0 から離れる	t 分布の両端

(6) 仮説検定の手順のまとめ

1) 興味のある母集団の特徴について，帰無仮説と対立仮説を作る。

2) 帰無仮説が正しいと仮定して，検定統計量の分布を求める。

3) 有意水準 α を決める（5%または 1%）。

4) 2)の検定統計量の分布において，棄却域を設定し，統計表から臨界値を求める。

5) 標本から検定統計量の値を計算し，この値が棄却域に入れば帰無仮説を棄却し，
入らなければ帰無仮説を棄却しない。

（例の続き）帰無仮説 $\mu = 70$ を対立仮説 $\mu \neq 70$ に対して有意水準 5%で検定する。

・帰無仮説が正しいと仮定すれば，　$T = \dfrac{\overline{X} - 70}{s/\sqrt{25}} \sim t(24)$

・対立仮説は $\mu \neq 70$ なので，t(24)の分布の両側に棄却域を作る。
有意水準（棄却域の面積）は 5%なので，0.05 を t 分布の両端に均等に割り振る。
t 分布表から，自由度 24 で上側の面積が 0.025 になる t の値（臨界値）2.064 を得る。

・標本から計算される検定統計量 $T = \dfrac{76 - 70}{10/\sqrt{25}} = 3$ は棄却域に入る。

⇒ 仮説検定の結果

帰無仮説：$\mu = 70$ は有意水準 5%で棄却される。