パターン認識及び演習

（第3回）

2010. 4. 27

情報科学研究科
石井　健一郎

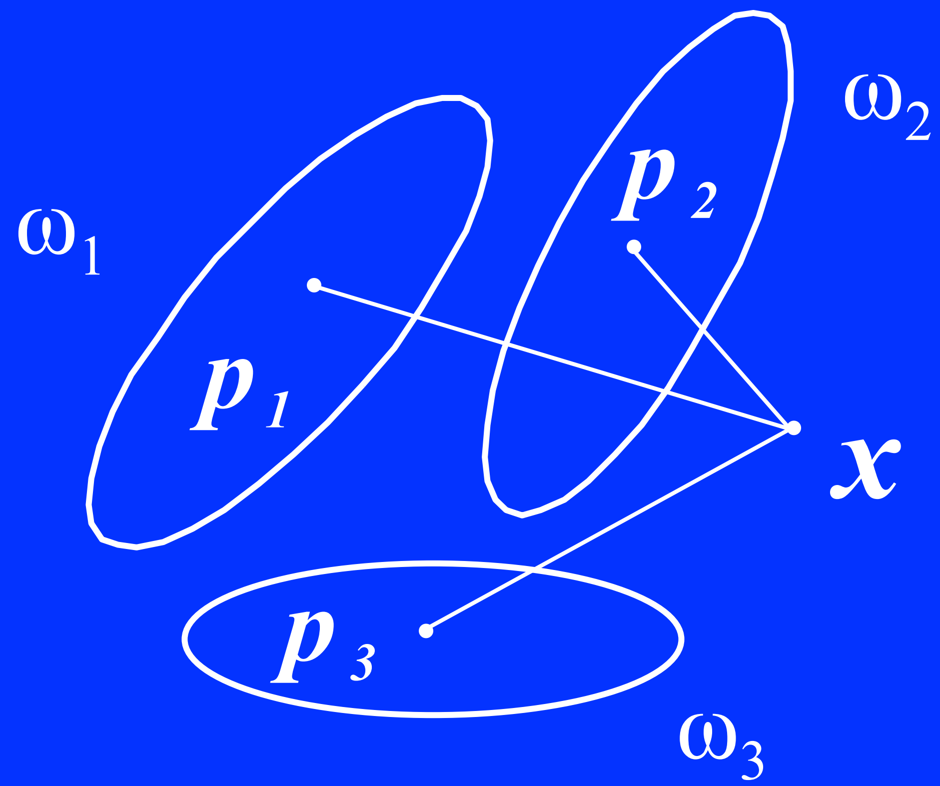
最小距離識別法 (1)　教科書14p下註

＝ クラスあたり1個のプロトタイプ

＝ Nearest Neighbor Rule の特別な場合

$\boldsymbol{x}$: 入力パターン

$\boldsymbol{p}_1 \ \boldsymbol{p}_2 \ \boldsymbol{p}_3$: プロトタイプ



最小距離識別法 (2)

教科書14p 式(2.1)参照

内積

$$
\begin{cases}
\| \boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}_1 \|^2 = \cancel{\| \boldsymbol{x} \|^2} - 2\,\boldsymbol{p}_1^t \boldsymbol{x} + \| \boldsymbol{p}_1 \|^2 \\
\| \boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}_2 \|^2 = \cancel{\| \boldsymbol{x} \|^2} - 2\,\boldsymbol{p}_2^t \boldsymbol{x} + \| \boldsymbol{p}_2 \|^2 \\
\| \boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}_3 \|^2 = \cancel{\| \boldsymbol{x} \|^2} - 2\,\boldsymbol{p}_3^t \boldsymbol{x} + \| \boldsymbol{p}_3 \|^2
\end{cases}
$$

⇒ 最小となる i ($i = 1, 2, 3$)

最小距離識別法 (3)

教科書15p 式(2.2)参照

識別関数

$$
\begin{cases}
g_1(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{p}_1^{\mathrm{t}}\boldsymbol{x} - \frac{1}{2}\|\boldsymbol{p}_1\|^2 \\
g_2(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{p}_2^{\mathrm{t}}\boldsymbol{x} - \frac{1}{2}\|\boldsymbol{p}_2\|^2 \\
g_3(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{p}_3^{\mathrm{t}}\boldsymbol{x} - \frac{1}{2}\|\boldsymbol{p}_3\|^2
\end{cases}
$$

⇒ 最大となる i ($i = 1, 2, 3$)

線形識別関数 ⇐ クラスあたり1個のプロトタイプのNN法

（教科書17p下）

$$g_i(\boldsymbol{x})$$

$$= \boldsymbol{p}_i^t \boldsymbol{x} - \frac{1}{2}\|\boldsymbol{p}_i\|^2$$

$$= w_{i0} + w_{i1}x_1 + w_{i2}x_2 + \cdots + w_{id}x_d$$

図2.2 識別関数法による識別

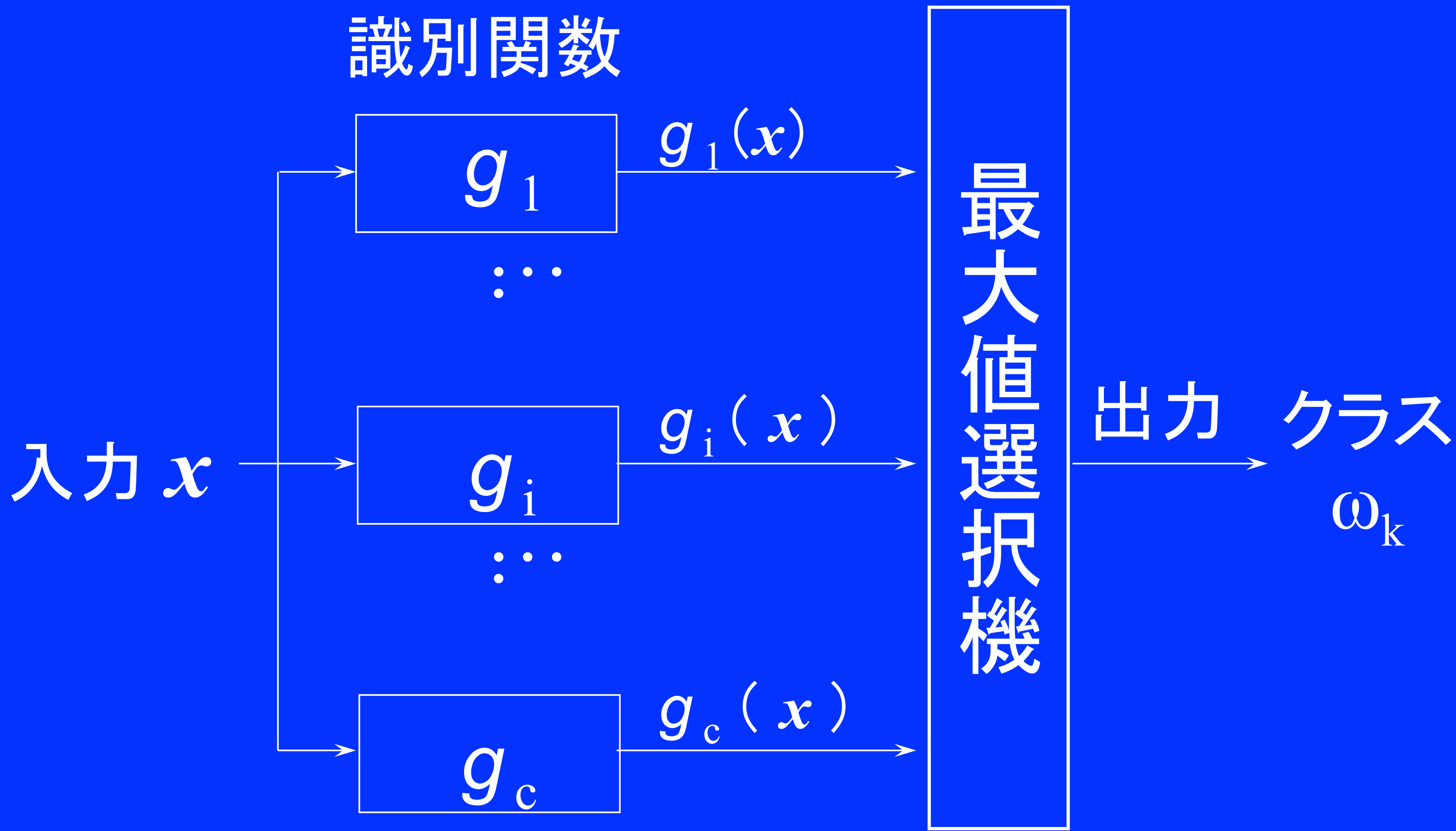
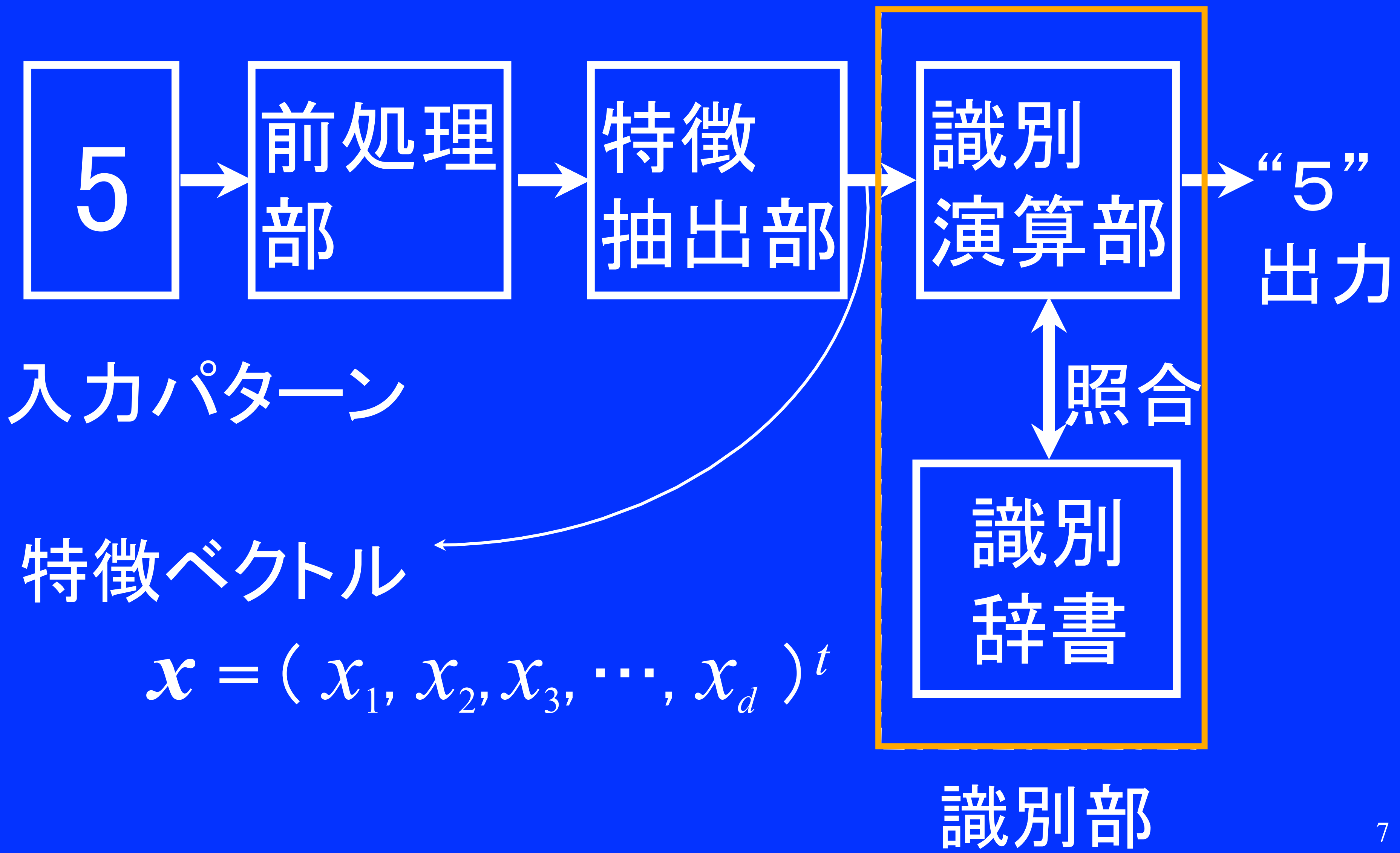


図1.1パターン認識系の構成



$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, \cdots, x_d)^t$$

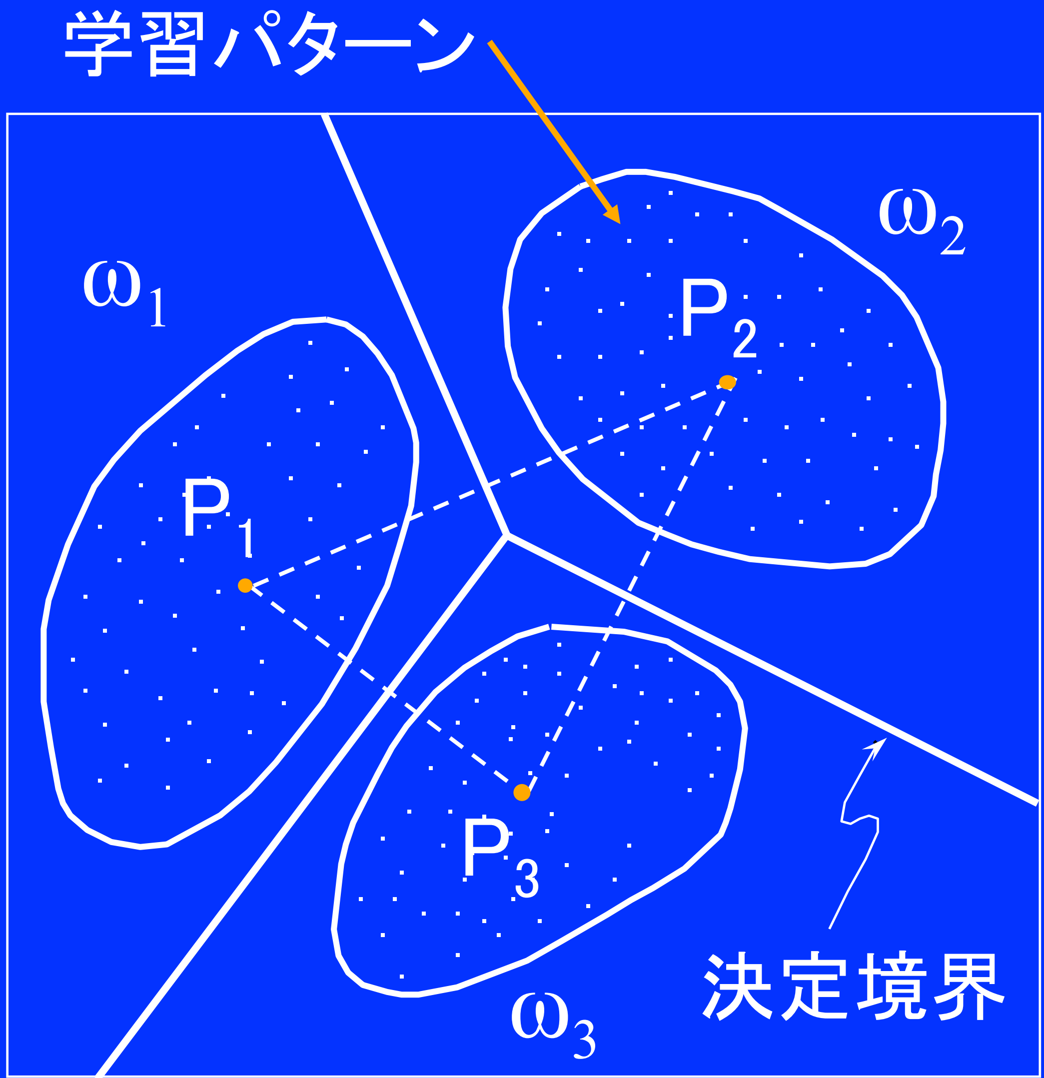
学習

大量の学習パターンを収集

学習パターンを全て識別できるような
プロトタイプを求める(1個/クラス)

学習パターンを全て識別できるような
線形識別関数の重みを求める

図1.8 クラスあたり1個のプロトタイプによる特徴空間の分離

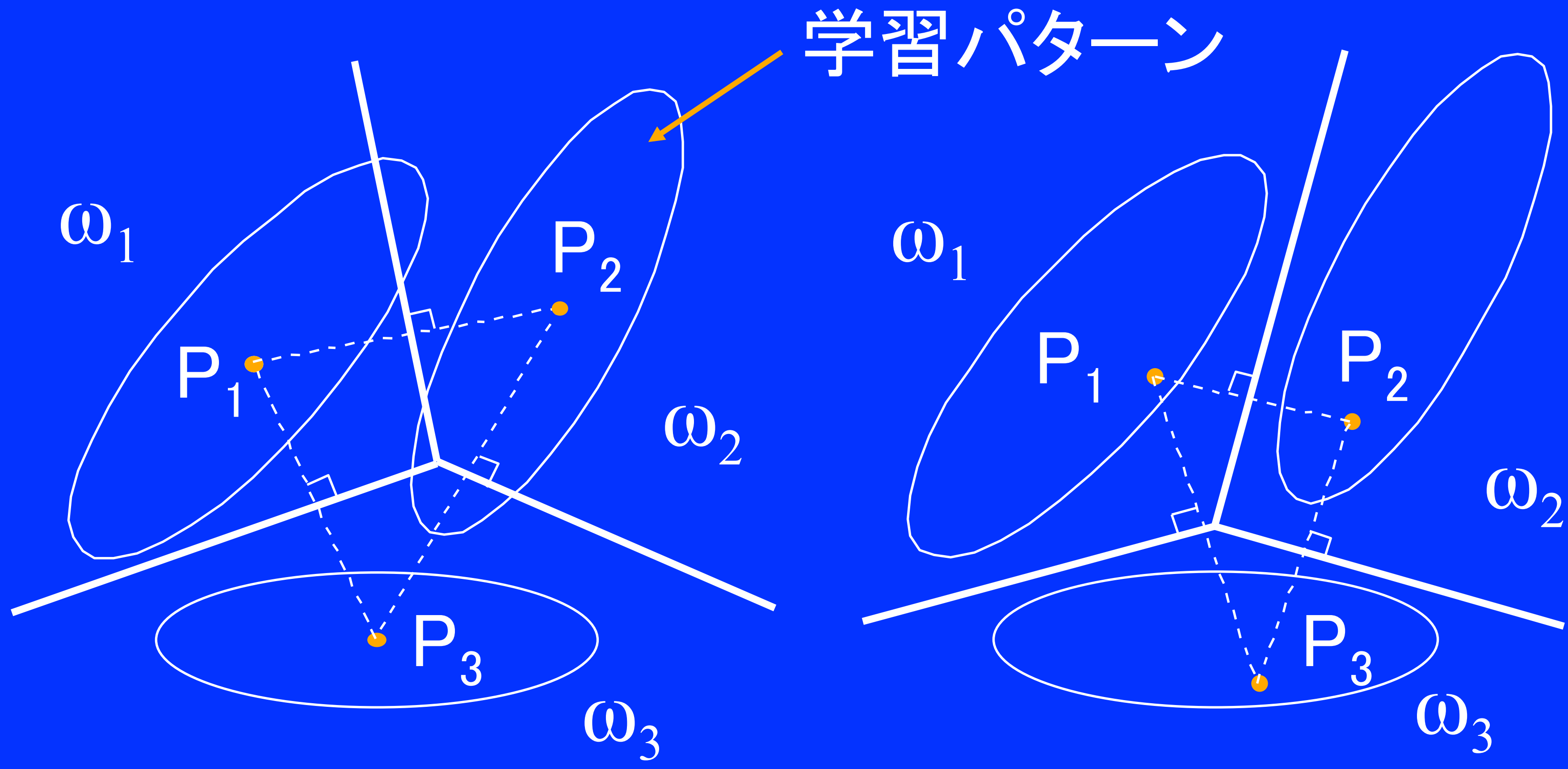


プロトタイプ

⇩

クラス分布の重心

図2.1 プロトタイプの設定方法とクラス間分離の関係



(a)プロトタイプ＝重心　　(b)プロトタイプ≠重心

多次元空間上で

正しい決定境界を

自動的に求めたい

プロトタイプの正しい位置

（プロトタイプを移動

させると重みも変化する）

↓

学習アルゴリズム

パーセプトロン

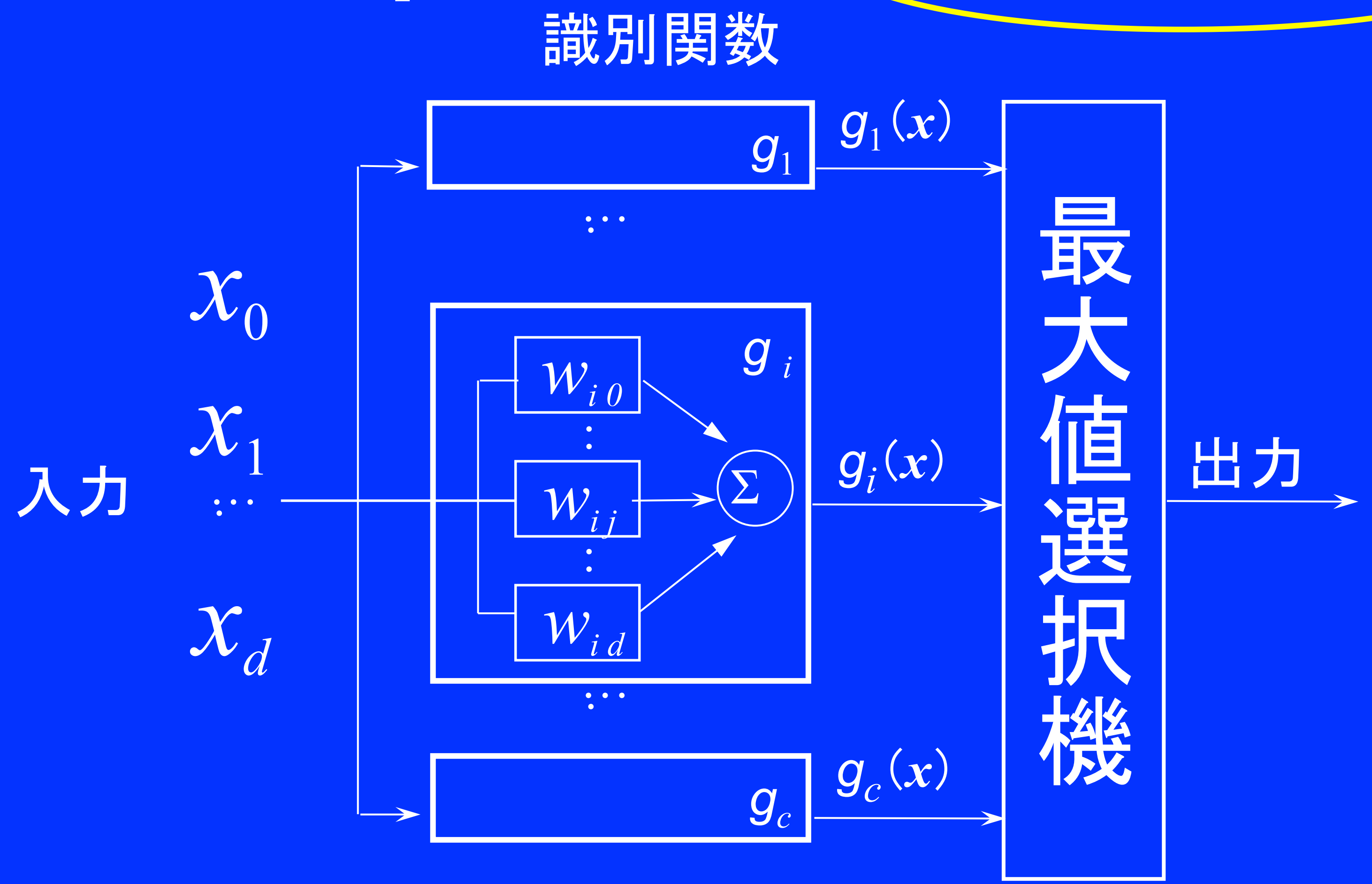
学習機能を持つ脳のモデルとして、F. Rosenblattによって1962年に提案された。

図2.3 線形識別関数

$$g_{\mathrm{i}}(\boldsymbol{x}) = w_{\mathrm{i}0} + w_{\mathrm{i}1}x_1 + w_{\mathrm{i}2}x_2 + \cdots + w_{id}x_d$$

$$= \boldsymbol{W}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{X}$$

パーセプトロン



パーセプトロンの学習規則

（クラス数c>2の場合　教科書23p　式(2.27)）

(1) 重みベクトル $\mathbf{w}_i (i = 1, \cdots, c)$ を初期設定

(2) 学習パターン $\mathbf{x}$ を一つ選ぶ（$\mathbf{x} \in \omega_i$ とする）

(3) 誤識別した場合のみ重みベクトルを修正

$$\begin{cases} \mathbf{w}_i' = \mathbf{w}_i + \rho \mathbf{x} \\ \mathbf{w}_j' = \mathbf{w}_j - \rho \mathbf{x} \end{cases} \qquad (\mathbf{x} \in \omega_j \text{ と誤識別したとき})$$

(4) 上記(2), (3)を全パターンに対して繰り返す

(5) 全パターンを正しく識別できたら終了
誤りがある時は(2)に戻る

多クラスの場合のパーセプトロン
（教科書23p　式(2･27)）

ω_iのパターンをω_jと誤ったとき

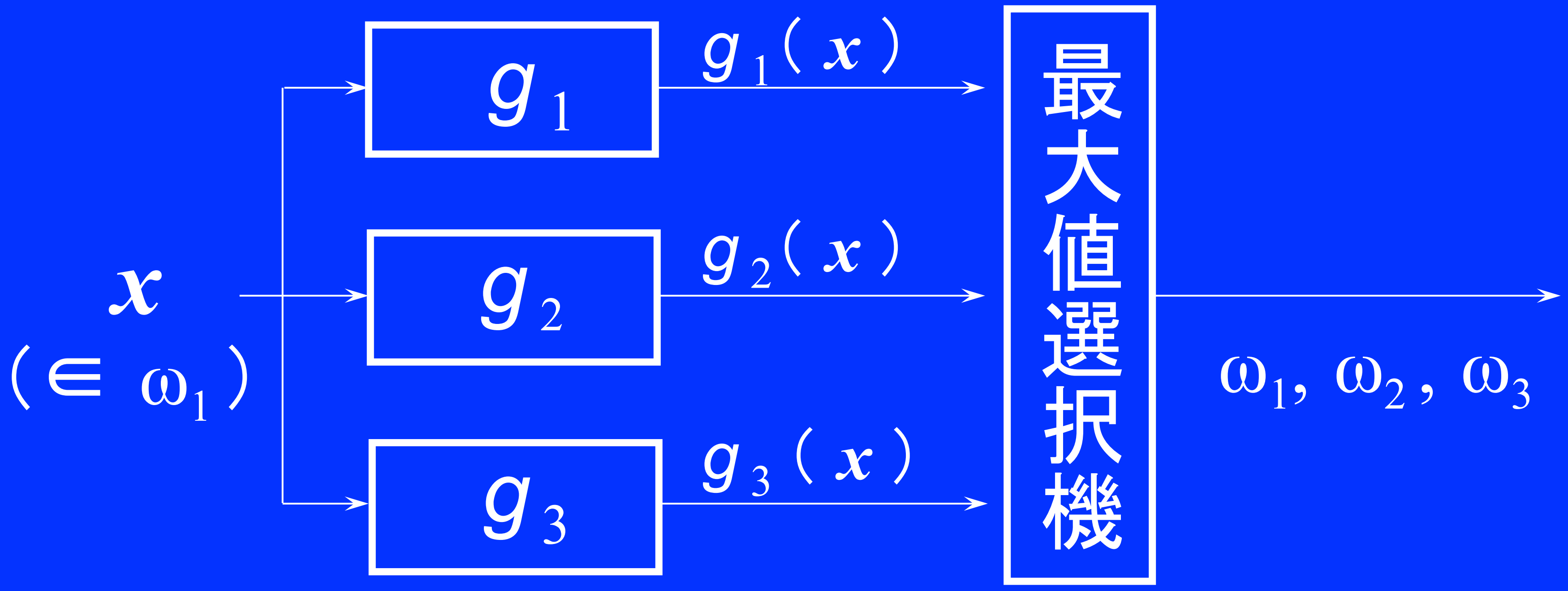
$$\left(\max_k \{ g_k(\boldsymbol{x}) \} = g_j(\boldsymbol{x}) \right)$$

重みの修正は2箇所で

- 自分のクラス　→　$g_i(\boldsymbol{x})$の修正
- 誤り先のクラス　→　$g_j(\boldsymbol{x})$の修正

多クラスの場合の誤り訂正法

（C= 3の例）



$g_1 > g_2 > g_3$　　$g_2 > g_1 > g_3$　　$g_3 > g_1 > g_2$

$g_1 > g_3 > g_2$　　$g_2 > g_3 > g_1$　　$g_3 > g_2 > g_1$

演習問題

学習による
重みベクトルの修正
（クラス数 $= 3$）（$\rho = 1$）

学習による重みベクトルの修正（クラス数=3）（ρ =1.0）

繰り返し数	パターン番号	所属クラス	パターン X_0	X_1	X_2	重み W_0	W_1	W_2	g(**x**)	max	正 ○ 誤 ×	要修正	新しい重み W_0'	W_1'	W_2'
1	1	ω_1	1	1	1	6	2	1	$g_1(x) =$ 9	v	○				
						2	1	5	$g_2(x) =$ 8						
						1	6	1	$g_3(x) =$ 8						
2	2	ω_1	1	2	1	6	2	1	$g_1(x) =$ 11		×	v	7	4	2
						2	1	5	$g_2(x) =$ 9						
						1	6	1	$g_3(x) =$ 14	v		v	0	4	0
3	3	ω_2	1	1	3	7	4	2	$g_1(x) =$ 17		○				
						2	1	5	$g_2(x) =$ 18	v					
						0	4	0	$g_3(x) =$ 4						

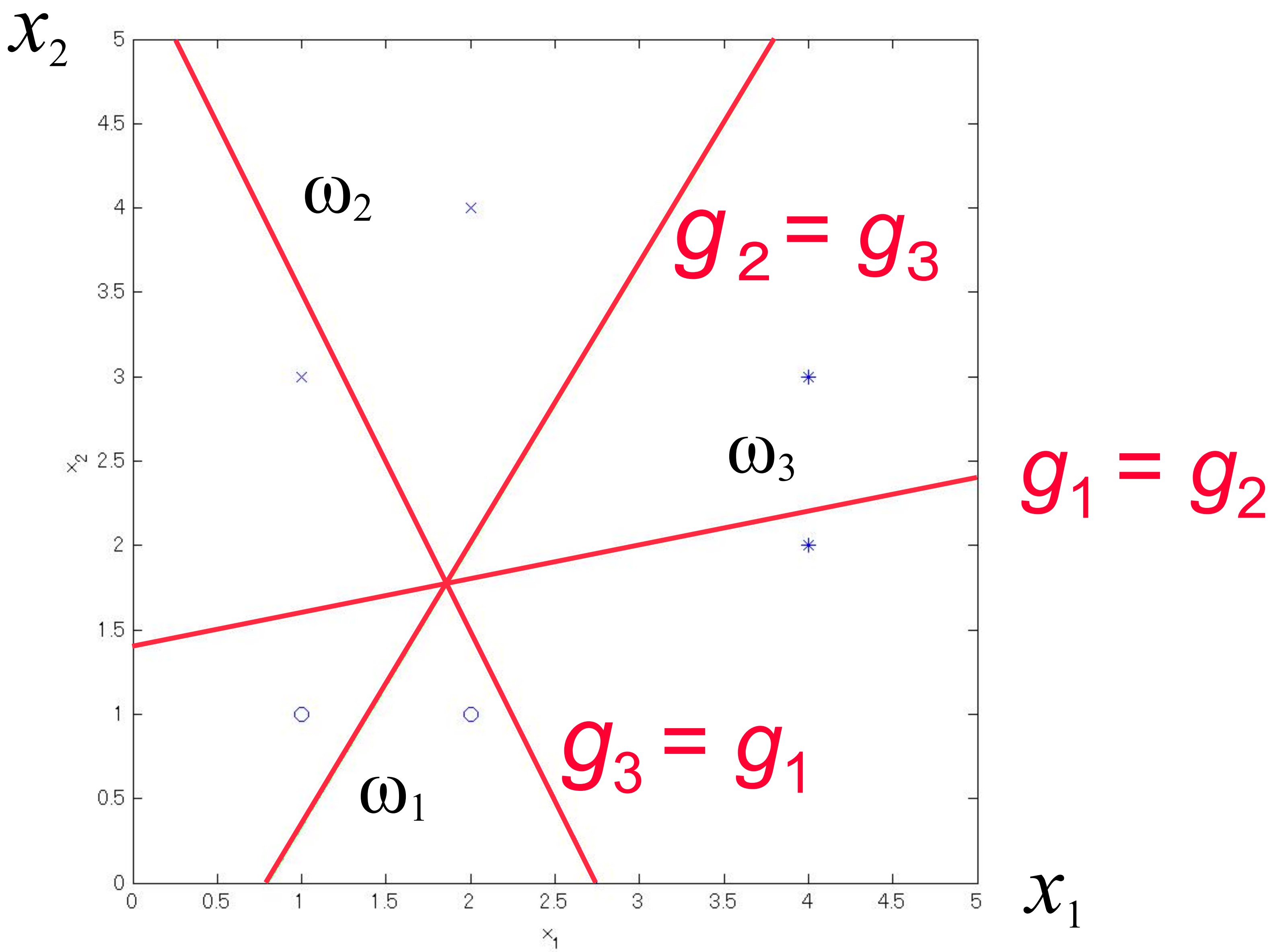
決定境界

$$g_1 - g_2 = 7 + x_1 - 5x_2 = 0$$

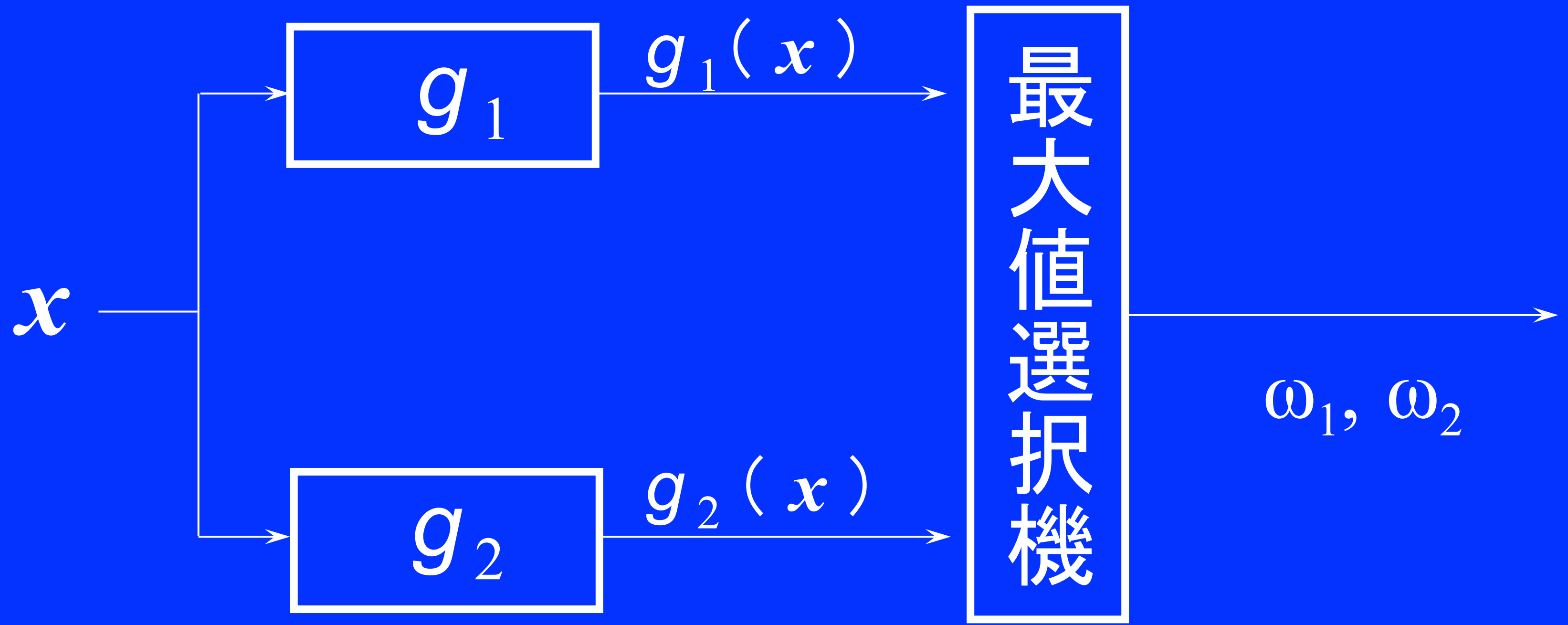
$$g_2 - g_3 = 4 - 5x_1 + 3x_2 = 0$$

$$g_3 - g_1 = -11 + 4x_1 + 2x_2 = 0$$

線形識別関数による決定境界([問4])



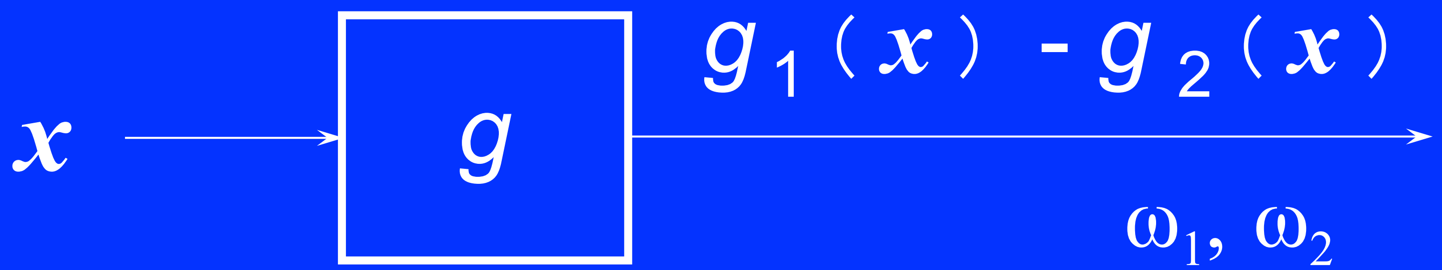
2クラスの場合の誤り訂正法



$$g_1 > g_2 \longrightarrow x \in \omega_1$$

$$g_2 > g_1 \longrightarrow x \in \omega_2$$

2クラスの場合の誤り訂正法
（1個の識別関数）



$$g = g_1 - g_2 > 0 \longrightarrow x \in \omega_1$$

$$g = g_1 - g_2 < 0 \longrightarrow x \in \omega_2$$

2クラスの場合のパーセプトロン
（教科書18p　式(2･18)～（2･21））

$$g(\boldsymbol{x}) = g_1(\boldsymbol{x}) - g_2(\boldsymbol{x})$$
$$= (\mathrm{w}_1 - \mathrm{w}_2)^t \mathrm{x}$$
$$= \mathrm{w}^t \mathrm{x}$$

$$\begin{cases} g(\boldsymbol{x}) = \mathrm{w}^t \mathrm{x} > 0 \rightarrow \boldsymbol{x} \in \omega_1 \\ g(\boldsymbol{x}) = \mathrm{w}^t \mathrm{x} < 0 \rightarrow \boldsymbol{x} \in \omega_2 \end{cases}$$

重みの修正は1箇所で

パーセプトロンの学習規則
（クラス数c＝2の場合）

（教科書21p）

式(2.25)

式(2.26)

↑

式(2.27)より導出できる

図2.4 学習の例

１次元特徴空間上の学習パターン
（d＝１）

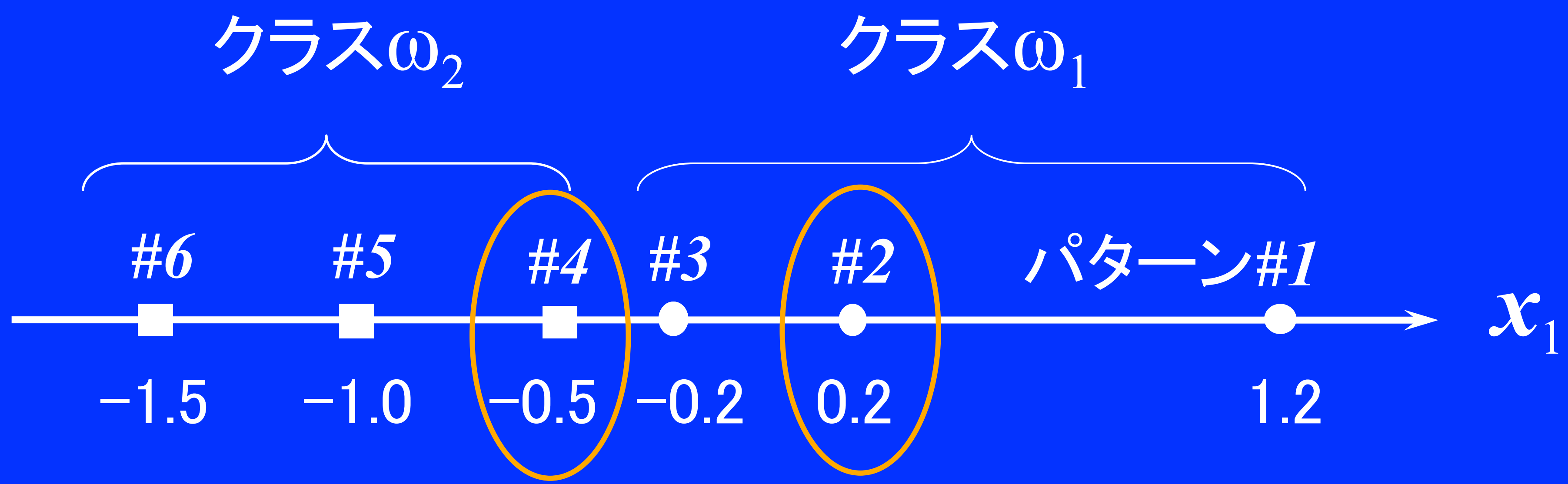
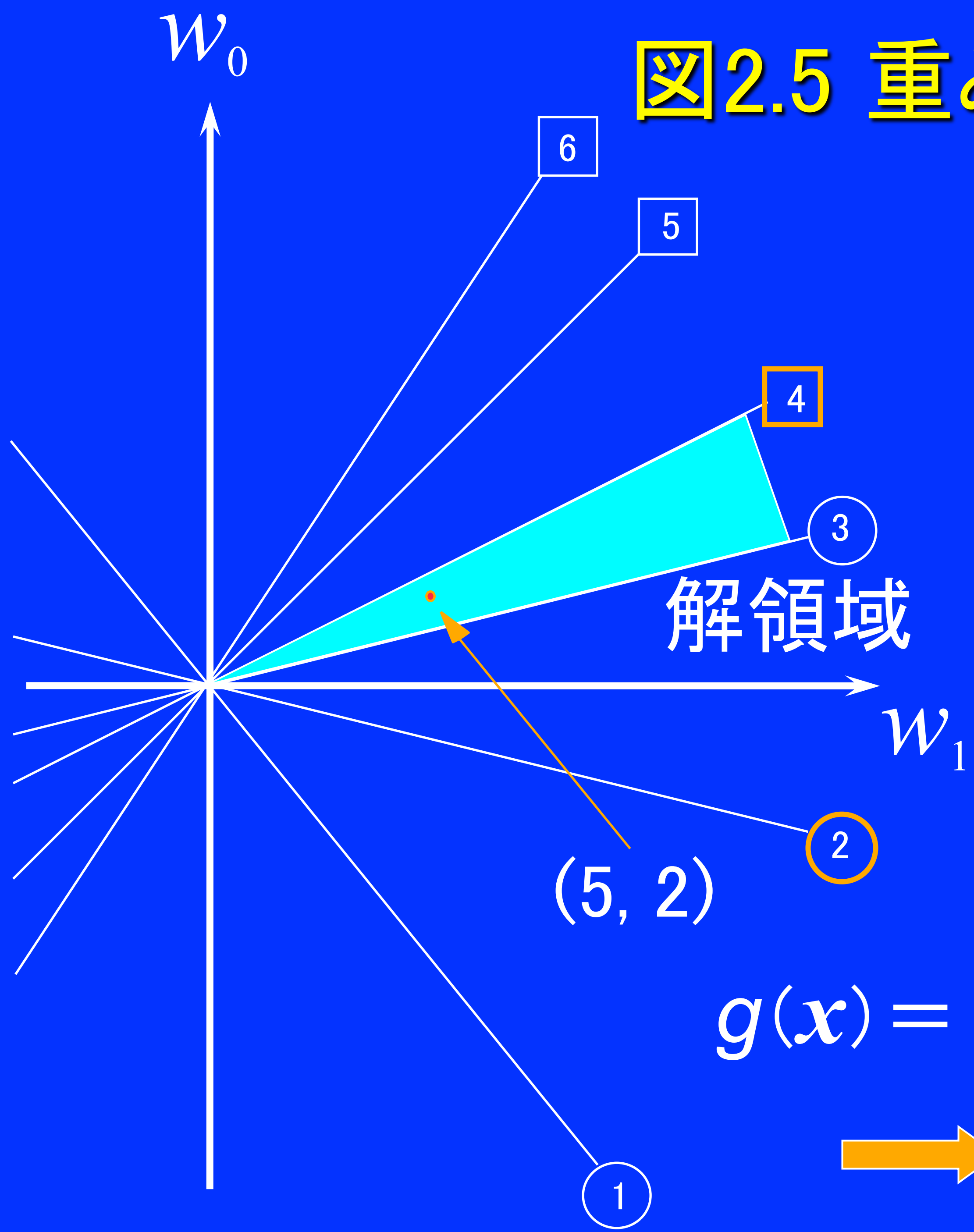


図2.5 重み空間と解領域



$$w_0 - 0.5\,w_1 = 0$$

$$w_0 + 0.2\,w_1 = 0$$

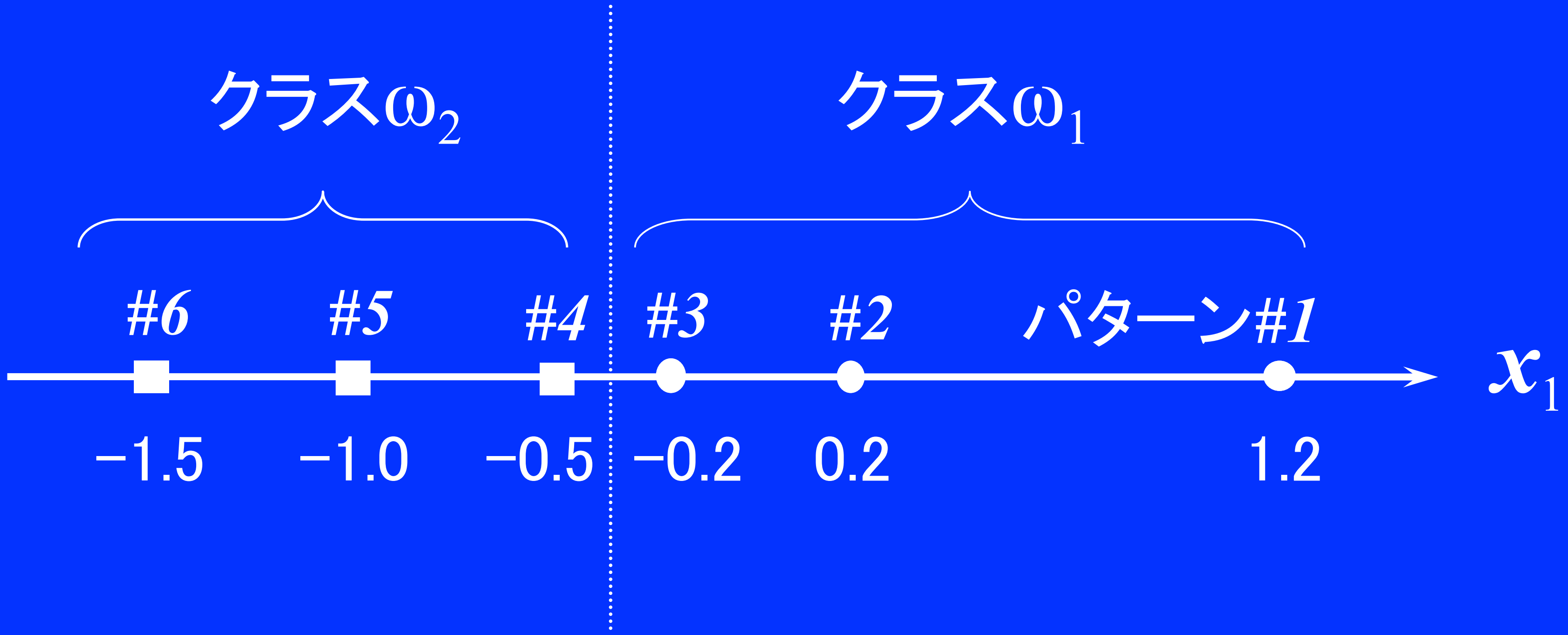
$$g(x) = 2 + 5x \gtrless 0$$

$$\Rightarrow \quad x \gtrless -2/5$$

図2.4 学習の例

1次元特徴空間上の学習パターン
（d＝1）

$$x_1 = -\frac{2}{5} = -0.4$$



重み修正の幾何学的意味
（クラス数c＝2の場合）

教科書22p 図2.6

図2.6 重みベクトルの修正

$$\mathbf{w}' = \mathbf{w} + \rho\,\mathbf{x}$$

$$\mathbf{w}' = \mathbf{w} - \rho\,\mathbf{x}$$

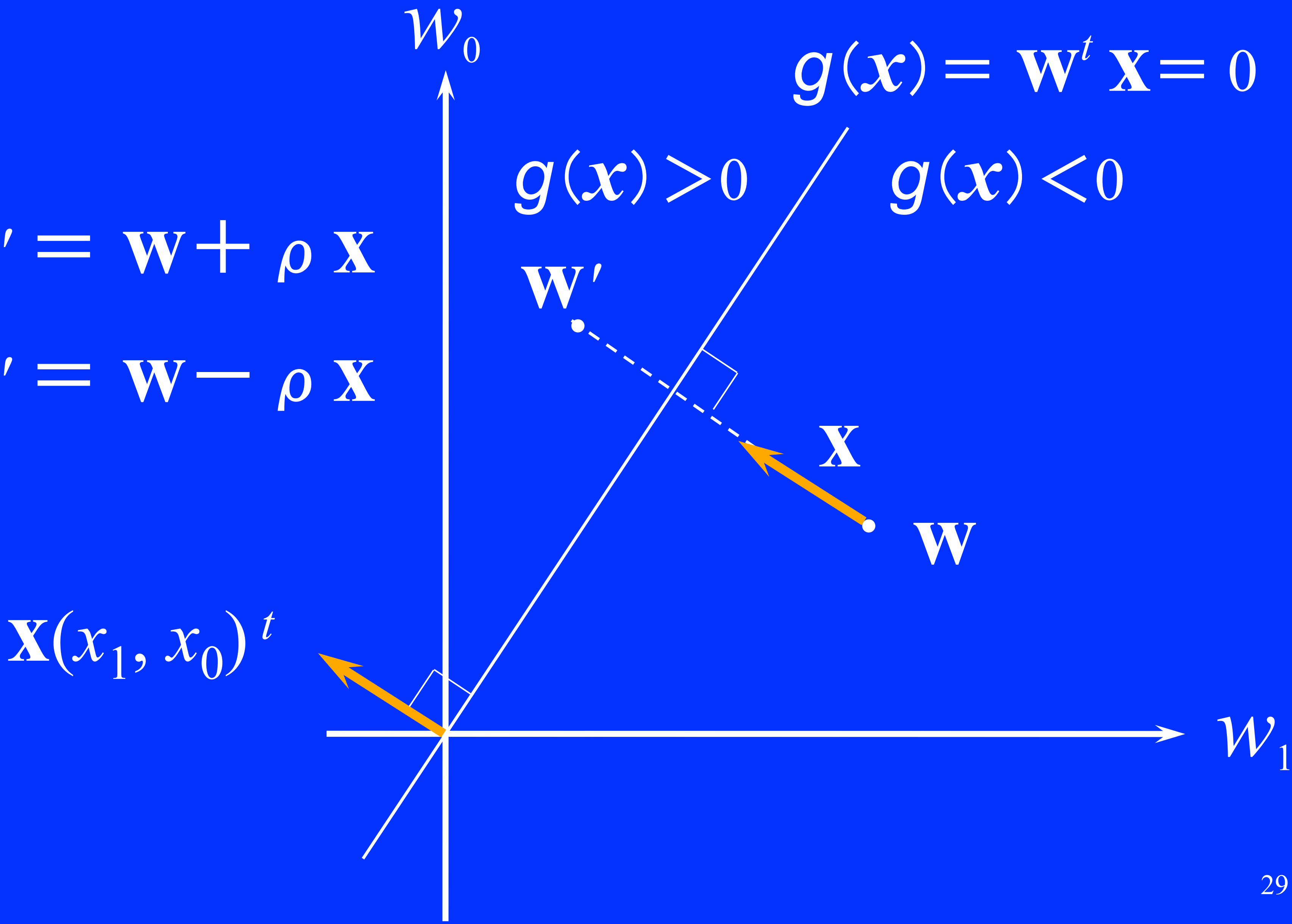
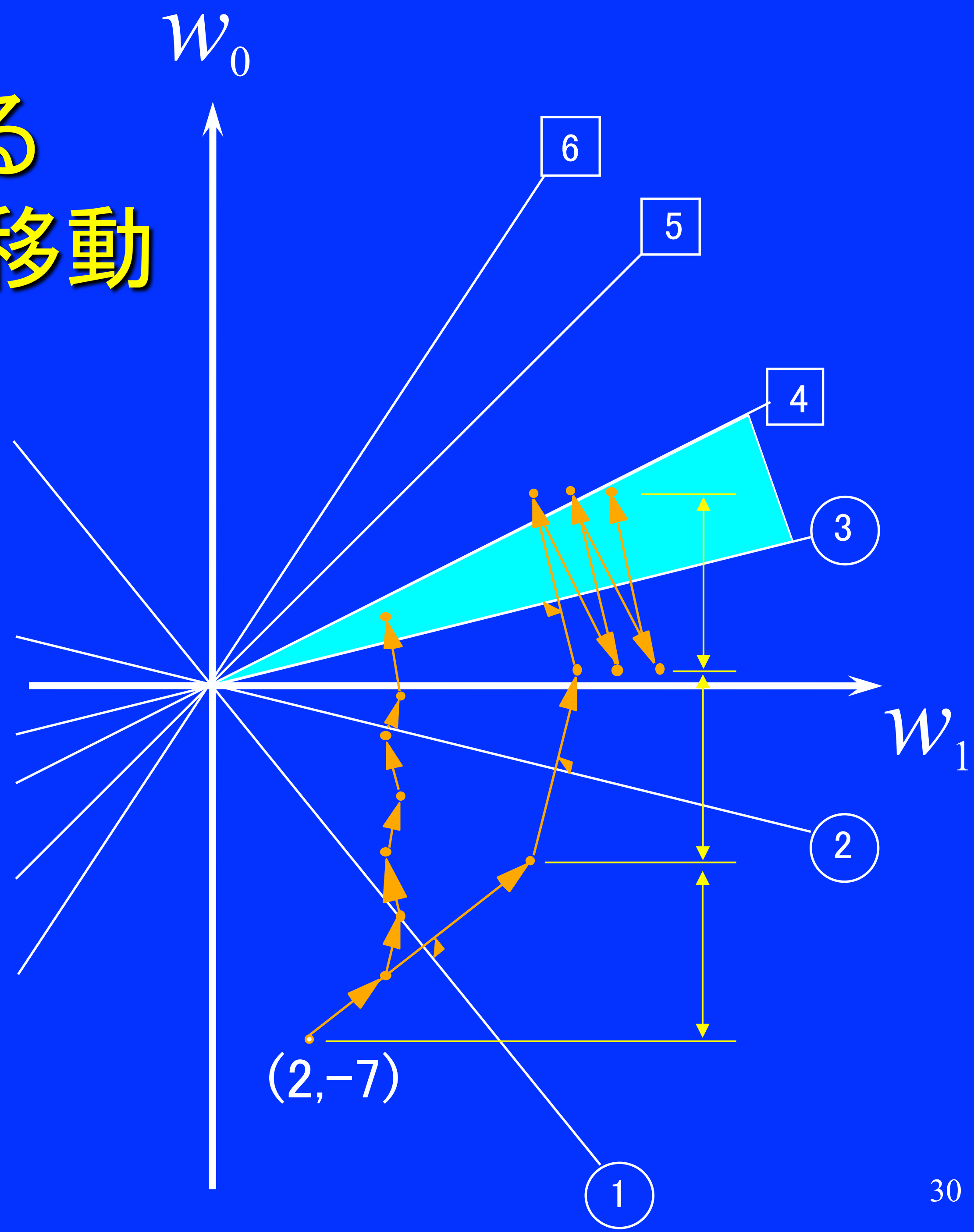


図2.7 学習による重みベクトルの移動

$\rho = 3.6$

$\rho = 1.2$



パーセプトロンの収束定理

線形分離可能ならば、この手続きは有限回の繰り返しで全学習パターンを正しく識別する重みベクトルに収束する。

（教科書21p 下）

パーセプトロンの学習規則
（クラス数c＝2の場合）

パーセプトロンの収束定理
（教科書21pの手順）