2　線形摂動論

2.1　ロバートソン・ウォーカー計量における線形摂動

コンフォーマル時間

$$\tau = \int_0^t \frac{cdt}{a} \tag{2.1}$$

摂動を含んだ計量

$$ds^2 = a^2(\tau)\left[-(1+2A)d\tau^2 - 2B_i d\tau dx^i + \left(\gamma_{ij} + 2C_{ij}\right)dx^i dx^j\right] \tag{2.2}$$

記法

$$(\cdots)' = \frac{d}{d\tau}(\cdots) \tag{2.3}$$

$$\mathcal{H} = a'/a = aH \tag{2.4}$$

$$X_{j_1 j_2 \cdots | i} = \nabla_i X_{j_1 j_2 \cdots} \qquad \text{3 次元共変微分} \tag{2.5}$$

$$X_{(i|j)} = \frac{1}{2}\left(X_{i|j} + X_{j|i}\right) \qquad \text{(対称化)} \tag{2.6}$$

微小座標変換

$$\tau \to \tilde{\tau} = \tau + T \tag{2.7}$$

$$x_i \to \tilde{x}_i = x_i + L_i \tag{2.8}$$

ゲージ変換

$$A \to \tilde{A} = A - T' - \mathcal{H}T \tag{2.9}$$

$$B_i \to \tilde{B}_i = B_i + L_i' - T_{|i} \tag{2.10}$$

$$C_{ij} \to \tilde{C}_{ij} = C_{ij} - \mathcal{H}\gamma_{ij}T - L_{(i|j)} \tag{2.11}$$

スカラー・ベクトル・テンソル分解

$$B_i = B^{(S)}_{|i} + B^{(V)}_i \qquad \left[B^{(V)|i}_i = 0\right] \tag{2.12}$$

$$C_{ij} = \gamma_{ij}D + C^{(S)}_{|ij} + C^{(V)}_{(i|j)} + C^{(T)}_{ij} \qquad \left[\begin{array}{l} C^{(V)|i}_i = 0 \\ C^{(T)i}_i = 0 \\ C^{(T)|j}_{ij} = 0 \end{array}\right] \tag{2.13}$$

以下、$B^{(\mathrm{S})} \to B, C^{(\mathrm{S})} \to C$ と略記
スカラー型ゲージ変換

$$A \to \tilde{A} = A - T' - \mathcal{H}T \tag{2.14}$$
$$B \to \tilde{B} = B + L' - T \tag{2.15}$$
$$C \to \tilde{C} = C - L \tag{2.16}$$
$$D \to \tilde{D} = D - \mathcal{H}T \tag{2.17}$$

コンフォーマル・ニュートンゲージ

$$T = B + C', \quad L = C \qquad \Rightarrow \qquad \tilde{A} \equiv \Phi, \quad \tilde{B} = 0, \quad \tilde{C} = 0, \quad \tilde{D} \equiv \Psi \tag{2.18}$$
$$ds^2 = a^2 \left[-(1 + 2\Phi) d\tau^2 + \gamma_{ij} (1 + 2\Psi) dx^i dx^j \right] \tag{2.19}$$

ゲージ不変ポテンシャル

$$\Phi = A - (B + C')' - \mathcal{H}(B + C') \tag{2.20}$$
$$\Psi = D - \mathcal{H}(B + C') \tag{2.21}$$

2.2 線形アインシュタイン方程式

以下、$c = 1$ の単位を採用する。
流体力学変数の線形摂動 (スカラー型)

$$\rho = \bar{\rho}(1 + \delta), \qquad p = \bar{p} + \delta p \tag{2.22}$$
$$(u^\mu) = \frac{1}{a}\left(1 - \Phi, v^{|i}\right), \qquad \left(u_\mu\right) = \frac{1}{a}\left(-1 - \Phi, v_{|i}\right) \tag{2.23}$$
$$\Sigma^0{}_0 = \Sigma^i{}_0 = \Sigma^0{}_i = 0, \qquad \Sigma^i{}_j = \bar{p}\left(\Pi^{|i}{}_{|j} - \frac{1}{3}\delta^i_j \triangle \Pi\right) \tag{2.24}$$

エネルギー・運動量テンソルの線形摂動 (スカラー型)

$$T^0{}_0 = -\bar{\rho}(1 + \delta) \tag{2.25}$$
$$T^0{}_i = (\bar{\rho} + \bar{p}) v_{|i} \tag{2.26}$$
$$T^i{}_j = (\bar{p} + \delta p)\delta^i_j + \bar{p}\left(\Pi^{|i}{}_{|j} - \frac{1}{3}\delta^i_j \triangle \Pi\right) \tag{2.27}$$

エントロピーゆらぎ

$$\Gamma = \left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_\rho \frac{\delta S}{\bar{p}} = \frac{\delta p}{\bar{p}} - \frac{c_s^2}{w}\delta \tag{2.28}$$

アインシュタイン方程式（背景部）

$$\left[\overline{G}^{\mu}{}_{\nu} = 8\pi G \overline{T}^{\mu}{}_{\nu}\right]$$

$$\mathcal{H}^2 + K = \frac{8\pi G}{3} a^2 \bar{\rho} \tag{2.29}$$

$$\mathcal{H}' = -\frac{4\pi G}{3} a^2 (\bar{\rho} + 3\bar{p}) \tag{2.30}$$

$$\left[\overline{T}^{\mu}{}_{\nu;\mu} = 0\right]$$

$$\bar{\rho}' + 3\mathcal{H}(\bar{\rho} + \bar{p}) = 0 \tag{2.31}$$

アインシュタイン方程式（摂動部）

$$[\delta G^{\mu}{}_{\nu} = 8\pi G\, \delta T^{\mu}{}_{\nu}]$$

$$3\mathcal{H}(\mathcal{H}\Phi - \Psi') + (\triangle + 3K)\Psi = -4\pi G a^2 \bar{\rho}\delta \tag{2.32}$$

$$\mathcal{H}\Phi - \Psi' = -4\pi G a^2 (\bar{\rho} + \bar{p}) v \tag{2.33}$$

$$\Psi'' - \mathcal{H}(\Phi' - 2\Psi') - (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\Phi - \frac{1}{3}\triangle\Phi - \frac{1}{3}(\triangle + 3K)\Psi = -4\pi G a^2 \delta p \tag{2.34}$$

$$\Phi + \Psi = -8\pi G a^2 \bar{p} \Pi \tag{2.35}$$

$$\left[\delta T^{\mu}{}_{\nu;\mu} = 0\right]$$

$$\delta' + 3\left(c_{\mathrm{s}}^2 - w\right)\mathcal{H}\delta + (1 + w)\,(\triangle v + 3\Psi') + 3w\mathcal{H}\Gamma = 0 \tag{2.36}$$

$$v' + \left(1 - 3c_{\mathrm{s}}^2\right)\mathcal{H}v + \frac{c_{\mathrm{s}}^2}{1 + w}\delta + \Phi + \frac{w}{1 + w}\left[\Gamma + \frac{2}{3}(\triangle + 3K)\Pi\right] = 0 \tag{2.37}$$

相対論的ポアソン方程式

$$(\triangle + 3K)\Psi = -4\pi G a^2 \bar{\rho}\,[\delta - 3\mathcal{H}(1 + w) v] \tag{2.38}$$

非等方ストレスなし ($\Pi = 0$) の場合

$$\Phi'' + 3\mathcal{H}(1 + c_{\mathrm{s}}^2)\Phi' - c_{\mathrm{s}}^2 \triangle\Phi + \left[8\pi G a^2 \bar{\rho}\left(c_{\mathrm{s}}^2 - w\right) - 2\left(1 + 3c_{\mathrm{s}}^2\right)K\right]\Phi = 4\pi G a^2 \bar{\rho} w \Gamma \tag{2.39}$$

$$\delta = \frac{2\,(\triangle + 3K)\,\Phi}{3\mathcal{H}^2} - 2\left(\Phi + \frac{\Phi'}{\mathcal{H}}\right) \tag{2.40}$$

$$v = -\frac{2\,(\Phi + \Phi'/\mathcal{H})}{3\mathcal{H}(1 + w)} \tag{2.41}$$