Lect 9 Exercise

今日のテーマ: 1. 線形写像, 2. 線形写像の性質, 3. 行列の正体

9-1. (1) V, W をベクトル空間とする. このとき, 写像 $f : V \to W$ が線形写像であるための条件を述べよ.

(2) 線形写像とはならない写像 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ の例を一つ作り, 線形写像でない理由を述べよ.

(3) 線形写像 $f : V \to W$ に対して, $f(\vec{0}) = \vec{0}$ が成り立つことを示せ.

9-2. 線形写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ に対して, 以下がなりたつとする.

$$f\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad f\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \quad f\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}.$$

このとき,

$$f\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$$

を求めよ.

9-3. (1) $m \times n$ 行列 A と $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ に対して, 以下が成り立つことを示せ. (ただし, $c \in \mathbb{R}$.)

$$A(\vec{v} + \vec{w}) = A\vec{v} + A\vec{w},$$
$$A(c\vec{v}) = c(A\vec{v}),$$

注: $A = (a_{ij})$ (すなわち, A の (i, j) 成分は a_{ij}), $\vec{v} = (v_i)$ とおく. このとき, ベクトル $A\vec{v}$ の第 i 成分は

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} v_k \ (= a_{i1}v_1 + \cdots + a_{in}v_n)$$

となる.

(2) $m \times n$ 行列 A に対して, 写像 f_A を

$$\begin{aligned} f_A : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^m \\ \vec{v} &\mapsto A\vec{v} \end{aligned}$$

と定める. (f_A を行列 A の定める写像と呼ぶ.) このとき, (1) の結果を用いて f_A は線形写像であることを示せ.

9-4. 線形写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ はある 4×3 行列 A を用いて $f = f_A$ と表すことができる. (f_A は 9-3 で定めたもの.) 与えられた f に対して行列 A を具体的にどのように定めれば良いか説明せよ.

(裏に 9-3 の解答例あり)

解答例

9-3. (1)

$A(\vec{v}+\vec{w}) = A\vec{v} + A\vec{w}$ について.

$$
\begin{aligned}
\text{左辺の第}\, i\, \text{成分} &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(v_k + w_k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}v_k + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}w_k \\
&= \text{右辺の第}\, i\, \text{成分}
\end{aligned}
$$

$A(c\vec{v}) = c(A\vec{v})$ について.

$$
\begin{aligned}
\text{左辺の第}\, i\, \text{成分} &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(cv_k) \\
&= c\sum_{k=1}^{n} a_{ik}v_k \\
&= \text{右辺の第}\, i\, \text{成分}
\end{aligned}
$$

(2) (1) を用いて,

$$f_A(\vec{v}+\vec{w}) = A(\vec{v}+\vec{w}) = A\vec{v} + A\vec{w} = f_A(\vec{v}) + f_A(\vec{w}).$$

$$f_A(c\vec{v}) = A(c\vec{v}) = c(A\vec{v}) = cf_A(\vec{v}).$$

よって, f_A は線形写像である.