Lect 8 Exercise

今日のテーマ: 1. 1 次独立の意味, 2. 基底と次元

8-1. V をベクトル空間, $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k \in V$ とするとき, 以下を示せ.

(1) $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ は一次独立とする. このとき, $\vec{w} \in V$ が $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ の一次結合で表されるならば, その表し方は一意的である.

(2) $k \geq 2$ とすると,

$\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ は 1 次独立でない

$\iff$ $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ のうち少なくとも一つが, 残りのベクトルの 1 次結合で表される

8-2. V をベクトル空間とする.

(1) $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k \in V$ が V の基底であることの定義を述べよ.

(2) V の次元 $\dim V$ の定義を述べよ. (ただし, $\dim V = 0, \infty$ の場合は考えなくて良い.)

8-3. (1) n 次元数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の元

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

が $\mathbb{R}^n$ の基底であることを示せ.

(2) $\dim \mathbb{R}^n = n$ である理由を述べよ.

8-4. 以下のベクトルは $\mathbb{R}^3$ の基底であるか調べよ.

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$